DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Zehnter Jahrgang. 27. Januar 1922. Heft 4.

DAVID HILBERT

ZUR FEIER

SEINES SECHZIGSTEN GEBURTSTAGES

Inhalt:

Seite

David Hilbert. Von *Otto Blumenthal, Aachen* 67
Der Algebraiker Hilbert. Von *O. Toeplitz, Kiel* 73
Hilberts geometrisches Werk. Von *M. Dehn, Frankfurt a. M.* 77
Hilbert als Analytiker. Von *R. Courant, Göttingen* 83
Hilbert und die Physik. Von *M. Born, Göttingen* 88
Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik. Von *Paul Bernays, Göttingen* 93
Verzeichnis der bisherigen Publikationen von David Hilbert (nebst kurzen Inhaltsangaben)
Von Karl Siegel, Göttingen 99

David Hilbert[1]).

Von Otto Blumenthal, Aachen.

Auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im Jahre 1900 fiel *David Hilbert* die Aufgabe zu, als Vertreter der deutschen Mathematik einen allgemeinen Vortrag zu halten. Dieser Vortrag war außergewöhnlich und ist kennzeichnend für *Hilberts* Arbeitsweise und für seine Persönlichkeit. Das übliche ist, daß in diesen allgemeinen Vorträgen die Redner einen zusammenfassenden Überblick geben über ein Einzelgebiet, auf dem sie sich betätigt haben. *Hilberts* Thema lautete: „Mathematische Probleme". Die Mathematik braucht jederzeit eine Anzahl großer Probleme, an denen sie ihren Fortschritt orientieren und prüfen kann. *Hilbert* gibt eine Aufzählung derjenigen Fragen, die ihm damals den Ehrentitel „Probleme" zu verdienen schienen. Solche Fragen müssen schwierig sein, aber doch angreifbar, sie müssen vor allem so klar gestellt sein, daß „jeder Mann auf der Straße" sie begreifen kann. Ihre Lösung oder auch nur die ernsthafte Beschäftigung mit ihnen belohnt durch die Entdeckung und Entwicklung neuer allgemeiner Methoden und Gesichtspunkte. Sehr bezeichnend ist, was über die Art gesagt wird, wie ein Problem anzugreifen sei. Es gibt drei Fälle: häufig ist die Frage zu speziell gestellt und gewinnt ihre wahre Einfachheit erst, wenn man sie als Glied eines allgemeineren Fragenkomplexes erkennt — hier denkt wohl jeder sogleich an *Hilberts* Beweis der Endlichkeit des Invariantensystems; vielfach hat man, im Gegensatz hierzu, zu hoch gegriffen, hat allgemein gefragt, bevor man sich noch über die in der Problemstellung enthaltenen Einzelfragen völlig klar war: dann besteht der Weg zur Lösung darin, daß man zunächst diesen auf den Grund geht; schließlich kann das Problem überhaupt falsch gestellt sein, dann versuche man den Unmöglichkeitsbeweis. Wenn aber die Lösung eines Problems nutzbringend für die Wissenschaft sein soll, dann muß sie vollständig sein. Zur Vollständigkeit gehört in erster Linie die Strenge, d. h. die Entwicklung der Lösung mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Anwendungen eines gegebenen Axiomensystems. Diese Strenge ist keine Feindin der Einfachheit, und Einfachheit ist die zweite Forderung, die an eine vollständige Lösung zu stellen ist. Und nun folgt die Aufzählung und Erläuterung von 23 Problemen. Sie sind gewählt aus allen Teilen der Mathematik, von der Mengenlehre und Zahlentheorie bis zur Mechanik und theoretischen Physik. Es wird besonders betont, daß die Zusammenwirkung aller dieser Teilgebiete notwendig sei, um die Mathematik im ganzen zu fördern, und daß auch in allen diesen Gebieten vollständige Lösungen möglich seien. Unter den Problemen finden sich manche, die im Jahre 1900 bereits klassisch oder wenigstens einem größeren Kreis von Fachgenossen bekannt waren, so das Cantorsche Kontinuumproblem, das Problem der Uniformisierung, das Primzahlproblem, das Dirichletsche Prinzip; viele andere sind von *Hilbert* neu aufgestellt; vor allem die Frage nach den allgemeinen Reziprozitätsgesetzen, axiomatische Fragen (Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome, Aufstellung der Axiome der Physik), und wichtige Probleme der Elementargeometrie (Zerlegbarkeit inhaltsgleicher Tetraeder, Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind). Das Fermatsche Problem findet sich nicht unter ihnen, und gerade das ist bedeutsam für *Hilberts* Auffassung der Probleme als Leitsterne der künftigen Entwicklung. Das Fermatsche Problem hat seiner Ansicht nach seine Dienste bereits geleistet, als es *Kummer* zum Studium der algebraischen Zahlkörper und zur Einführung der Ideale anregte.

Hilbert ist der Mann der Probleme. Er sammelt und löst vorhandene, er weist neue. Sein Lebensgang läßt sich an Hand der Probleme entwickeln. Die Geburt eines Menschen ist Zufall, seine Entwicklung sein eigenes Werk. Geboren ward der Mathematiker *Hilbert* aus dem Schoße der damals allgewaltigen Invariantentheorie. Bei ihr fand er sein erstes Problem, den Satz, daß alle Invarianten eines Formensystems sich durch eine endliche Anzahl unter ihnen ganz und rational darstellen lassen. Nachdem dem Sechsundzwanzigjährigen 1888 ein einfacher Beweis in einem schon früher durch *Gordan* und *Mertens* mit Hilfe schwieriger Rechnungen erledigten Sonderfall gelungen war, kam 1890 der großartige allgemeine Beweis, der das Problem mit dem allgemeinen Fragenkomplex der Modultheorie verknüpfte und dadurch zur Lösung brachte. Aber die Lösung war noch nicht vollständig: die End-

[1]) *David Hilbert* ist geboren 23. Januar 1862 in Königsberg i. Pr., wo sein Vater Amtsgerichtsrat war, besuchte das Friedrichs-Kolleg und machte Herbst 1880 im Wilhelms-Gymnasium das Abiturium. Studierte in Königsberg, hauptsächlich bei *Lindemann* und *Hurwitz*, in Heidelberg bei *Fuchs*, und promovierte 1885 bei *Lindemann*. Ging dann nach Leipzig zu *Klein* und Paris zu *Hermite*. Sommer 1886 habilitierte er sich in Königsberg, wurde Herbst 1892 Extraordinarius, Herbst 1893 Ordinarius daselbst. Frühjahr 1895 ging er nach Göttingen. Rufe nach Leipzig (1898), Berlin (1902), Heidelberg (1904), Bern (1919) lehnte er ab.

lichkeit des Invariantensystems war bewiesen, aber kein Mittel war gegeben, das endliche System wirklich herzustellen. Es bedurfte einer mühevollen Arbeit, eines tiefen Eindringens in die Feinheiten der Modulsysteme, bis 1893 die letzte Forderung der Vollständigkeit erfüllt war.

Und damit hatte sich auch ein neues großes Problem ergeben. *Kroneckers* Modulsysteme hatten zur Zahlentheorie hinübergewinkt. Im Verkehr mit den Freunden *Hurwitz* und *Minkowski* waren die Grundlagen der Idealtheorie geklärt worden. Noch 1893 entstand *Hilberts* einfacher Beweis der Zerlegung in Primideale, es stellten sich die Fragen der Relativkörper, besonders der Relativ-Abelschen Körper, und der Reziprozitätsgesetze. Was hier von *Hilbert* geschaffen wurde, hat tiefste Wirkung gehabt. Kodifiziert in dem gewaltigen „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper" von 1897 hat es die neuere Entwicklung der Zahlentheorie recht eigentlich begründet.

Nun aber geschieht etwas Seltsames. *Hilbert*, bis dahin scheinbar der Typus des Arithmetikers und Algebraikers, sieht sein Ziel auf diesen Gebieten erreicht und wendet sich so vollkommen von ihnen ab, daß er kaum noch je auf sie zurückgekommen ist. Im Jahre 1891 hatte *Wiener* auf der Naturforscherversammlung in Halle einen Vortrag über „Grundlagen und Aufbau der Geometrie" gehalten, in dem er namentlich das Verhältnis des Pascalschen zum Desarguesschen Satze besprach. *Hilbert* hat mir erzählt, daß ihm dieser Vortrag eine solche Anregung zur Beschäftigung mit den Axiomen der Geometrie gegeben habe, daß er ihr gleich auf der Rückfahrt in der Eisenbahn nachgegangen sei: wohl ein Beweis, daß die Einstellung auf axiomatische Betrachtungsweise schon früher bei ihm vorhanden war. Eine zweite Quelle der Anregung waren *Minkowskis* geometrische Ideen. Der Reiz des Gebietes der Elementargeometrie aber lag für *Hilbert* darin, daß er hier das einfachste Beispiel sah, an dem er sein aus der Zahlentheorie abstrahiertes Ideal eines vollständigen Beweisgebäudes außerhalb der Lehre von den ganzen Zahlen durchkonstruieren konnte, als Gegenbeispiel gegen die von *Kronecker* vertretene und von *Hilbert* immer leidenschaftlich bekämpfte Auffassung, daß aller Mathematik, die sich nicht unmittelbar an die ganze Zahl anknüpfen lasse, ein unreinlicher Erdenrest anhafte. Im Wintersemester 1898/99 hielt *Hilbert* seine berühmt gewordene Vorlesung über „Elemente der Euklidischen Geometrie", zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, im Juni 1899 veröffentlichte er seine „Grundlagen der Geometrie", die seither, im Hauptteil unverändert, in vier Auflagen erschienen sind und eben wieder vor einer neuen Auflage stehen. Die Bedeutung dieser Schrift, der Grund des Zaubers, den sie ausgeübt hat und noch ausübt, besteht in ihrem systematischen, lückenlosen Aufbau. Unabhängigkeitsbeweise für gewisse geometrische Axiome lagen bereits vor, z. B. im klassischen Falle des Parallelenaxioms, die tiefgehenden „Zwischen"-Axiome waren von *Pasch* erkannt und analysiert worden. Neu aber war ein vollständiges System, in dem *alle* Axiome auf ihre Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit untersucht werden, in dem von *allen* geometrischen Grundlehren (Ähnlichkeitslehre, Inhaltslehre, Desargues und Pascal, Pythagoras u. a.) die Abhängigkeit von den Axiomen und die gegenseitige Beziehung im einzelnen untersucht und bis zum Ende aufgeklärt wird. Die Bedeutung der „Grundlagen der Geometrie" geht aber viel weiter. Eine neue logische Methode ist durch sie begründet worden, die „axiomatische" Methode der impliziten Definition von Dingen durch die Grundgesetze, die sie verknüpfen. Bis weit hinein in die Philosophie reichen schon jetzt die Auswirkungen dieser Methode. Auf *Hilberts* eigenes Werk in dieser Richtung kommen wir noch zu sprechen. Denn die Axiomatik ist ein so wesentlicher Teil seines Ich, daß sie ihn als Problem immer weiter begleitet und geleitet hat.

Zunächst aber, nach den Grundlagen der Geometrie, ist es die Begründung der Variationsrechnung und ihrer Anwendungen, die ihm als Ziel vor Augen steht. Von der Zahlentheorie über die Elementargeometrie hierher führt erkennbar ein Anstieg vom Methodisch-Leichteren zum Methodisch-Schwereren. Die Variationsrechnung soll das Mittel liefern, die mühsamen Grenzwertbetrachtungen der Analysis zu beseitigen, indem ein einziger Existenzbeweis durch Grenzwertbildung, der Beweis der Existenz der Lösung des regulären Variationsproblems, die vielen Einzelbetrachtungen ad hoc überflüssig machen soll. Das Problem ist klassisch, seitdem *Riemann* seine Theorie der Abelschen Funktionen auf dem Dirichletschen Prinzip aufgebaut hat. Aber es galt als unangreifbar. Hier ist es wohl die in dem Vortrag über „Mathematische Probleme" erwähnte Methode der genauen Durcharbeitung der einfachsten Fälle, die *Hilbert* ergriffen hat. Im Anschluß an *Weierstraß* hat er die Grundlagen der Variationsrechnung, die mühevollen und vielfach durch unnötige Beschränkungen komplizierten Betrachtungen beim einfachen Problem und bei Nebenbedingungen, aufs äußerste vereinfacht und übersichtlich gemacht. Dann gelang in der Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1901 der erste Beweis der Existenz der Abelschen Integrale mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips nach einer völlig allgemeinen Methode, die später noch auf manche verwandte Fragen der Funktionentheorie angewandt wurde.

Hier lenkt zum ersten und vielleicht zum einzigen Male ein günstiger Zufall, eine Anregung von außen, *Hilberts* Schaffen in neue Bahnen. Das Ziel bleibt das gleiche, die Begründung der Analysis auf einem Minimum von Existenzbewei-

sen, aber zu der Variationsrechnung tritt eine neue Methode. Im Jahre 1900 hatte *Fredholm* die Auflösung der linearen Integralgleichung gelehrt und damit den wahren Grund vieler herrlicher, aber schwieriger Entwicklungen *Poincarés* über die Randwertaufgaben der mathematischen Physik aufgedeckt. Sofort erkannte *Hilbert*, daß er hier den mächtigen Hebel in der Hand habe, mit dem, in Verbindung mit der Variationsrechnung, sich die Analysis regieren lasse. Es ist ein einziger Grenzübergang, der von einem System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten zu einem System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten — in umfassendster Weise ausgeführt mittels des Begriffs der vollstetigen Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen —, der viele lang erstrebte Früchte auf einmal zu pflücken gestattet, besonders die Existenz der Eigenwerte, des „Spektrums", und die Entwickelbarkeit beliebiger Funktionen nach den Eigenfunktionen liefert. Und auch das Riemannsche Problem der linearen Differentialgleichungen mit gegebenen Verzweigungen und gegebener Gruppe, das der reinen Variationsmethode widerstanden hatte, mußte sich der Gewalt der Integralgleichungen fügen.

Variationsrechnung und Integralgleichungen sind heute die unbedingt herrschenden Methoden in der Funktionentheorie, die Literatur ist fast unübersehbar geworden, das Wort „Hilbertschule" bezeichnet besonders den Kreis der Jünger auf diesem Arbeitsfelde, und *Hilberts* Darstellung der Integralgleichungen, wie er sie in seinen 6, später als Buch zusammengefaßten Noten „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" niedergelegt hat, ist bis auf die Bezeichnungen und die Kunstausdrücke maßgebend geblieben.

Die Veröffentlichungen über Integralgleichungen fallen, mit Ausnahme der 6. Note vom Jahre 1910, in die Jahre 1904 bis 1906. Mit diesen Jahren schließt in *Hilberts* Leben eine Epoche ab, die sachlich als die rein-mathematische, ihrem Wesen nach als die heroische bezeichnet werden kann, die Epoche des Ringens mit den alten mathematischen Problemen, die erst fallen mußten, bevor der Weg nach außen frei war. Im Jahre 1905 wurde zum erstenmal der Bolyai-Preis der Ungarischen Akademie erteilt, der bestimmungsgemäß „dem Autor der hervorragendsten mathematischen Untersuchungen der letzten 25 Jahre" zuzufallen hat. Die Kommission mit *Darboux* als Präsidenten und *Klein* als Referenten nannte als einzige in Betracht kommende Kandidaten *Hilbert* und *Poincaré*, erkannte den Preis *Poincaré* zu, „dessen Untersuchungen bereits im Jahre 1879 einsetzen und sozusagen einen Kreislauf um das Gesamtgebiet der Mathematik vollendet haben", beschloß aber gleichzeitig, in ihrem Berichte der Arbeiten *Hilberts* ebenso ausführlich zu gedenken wie der Arbeiten *Poincarés*. „Denn sie würdigt die universelle Bedeutung derselben in vollem Maße und ist überzeugt, daß sie je länger, je mehr zu einer Rolle von größter Bedeutung berufen sind." Ich bin damals von *Klein* zu einer sehr eingehenden Besprechung über die Vorarbeiten zu diesem Gutachten herangezogen worden und erinnere mich einer früheren Fassung dieses letzten Satzes, die prophetischer klang, etwa so: „*Hilbert* wird noch ein ebenso umfassendes Gebiet umspannen wie *Poincaré*." Man wird ex eventu bedauern, daß diese Fassung durch eine farblosere ersetzt worden ist. Denn gerade zu dieser Zeit gab *Hilbert* dem Trieb nach extensiver Forschung Lauf, der ihn noch heute beherrscht. Er gehört seitdem den mathematischen Anwendungen zu, in demselben Umfang, wenn auch in anderer Richtung als *Poincaré*.

Nur noch einmal ist er zu einem rein-mathematischen Problem zurückgekehrt, um es einer unerwarteten Lösung entgegenzuführen, und zwar zu einem, dessen er in seinem Pariser Vortrage nicht gedacht hat. Der von *Waring* aufgestellte Satz, daß sich jede ganze Zahl als Summe einer begrenzten (nur von dem Exponenten abhängigen) Anzahl $n$ter Potenzen ganzer Zahlen darstellen lasse, war im Jahre 1908 Gegenstand verschiedener Erörterungen und glücklicher Entdeckungen gewesen, die die Erkenntnis wesentlich gefördert hatten. Insbesondere war man auf gewisse Identitäten aufmerksam geworden, die ein Vielfaches der $n$ten Potenz einer Summe von Quadraten durch eine Summe von (2^n)ten Potenzen linearer Funktionen mit ganzen Koeffizienten ausdrücken. Aber erstens fehlten die Mittel zur allgemeinen Aufstellung dieser Identitäten, zweitens hatte man sie nur dazu benutzt, um den Waringschen Satz von n auf 2^n zu übertragen. Mittels einer Integralmethode, die durch ihre anscheinende Selbstverständlichkeit an den Beweis für die Endlichkeit des Invariantensystems erinnert, stellt *Hilbert* zunächst die gesuchten Identitäten allgemein her, und dann zeigt er auf einem höchst kunstvollen Wege, daß sie nicht allein zur Übertragung von n auf 2^n, sondern zum unmittelbaren Beweise des lang umstrittenen Waringschen Satzes dienen. Diese Arbeit, eine der merkwürdigsten, die er geschrieben, hat *Hilbert* am 6. Februar 1909 dem wenige Wochen zuvor verstorbenen *Minkowski* zum Andenken geweiht.

Wenn ich die rein-mathematische Epoche die heroische genannt habe, muß ich wohl die folgende als die klassische bezeichnen. Aber sie ist alles weniger als klassisch in dem Sinne abgeklärter Ruhe. *Goethe* spricht einmal zu *Eckermann* von gewissen Naturen, die er „genial" nennt, und mit denen es „eine eigene Bewandtnis" habe: „sie erleben eine wiederholte Pubertät, während andere Leute nur einmal jung sind". Die Jahre, von etwa 1904 an, als *Hilbert* im Verein mit *Minkowski* zur Eroberung der Physik auszog,

waren seine zweite Jugend. Mit dem Feuereifer und der rücksichtslosen Anspannung eines jungen Studenten stürzte er sich auf eine Wissenschaft, von der ihm bis dahin nur die großen Linien, Einzelheiten wenig bekannt waren. So groß war die Anstrengung, daß zum ersten und einzigen Mal seine Gesundheit längere Zeit versagte. *Hilberts* Ziel ist die Axiomatik der Physik, d. h. die Aufstellung eines Komplexes von Grunderscheinungen, auf den sich alle beobachteten physikalischen Tatsachen durch lückenlose mathematische Deduktion zurückführen lassen. Es ist der einzige Weg, auf dem wir zu einem geschlossenen physikalischen Weltbilde gelangen können. Es ist auch ein Weg, der durch Aufdeckung von Widersprüchen und durch das Streben nach Zusammenfassung zu neuen Entdeckungen führen kann und muß. Das erste Goldkorn bei dieser gemeinsam mit *Hilbert* unternommenen Tiefbohrung hat *Minkowski* gefunden, seine Relativitätstheorie. Die ungeheure Schwierigkeit der Aufgabe läßt sich an zwei Beispielen klar machen. Schon in der gewöhnlichen Mechanik besteht Streit über die Tragweite der Variationsprinzipien, wenn der Bewegung differentielle („nicht-holonome") oder in Ungleichungen bestehende Nebenbedingungen vorgeschrieben sind. Die Überlegungen ad hoc, die man zur Erledigung von Sonderfällen braucht, müssen in *Hilberts* System ausgemerzt werden. Noch ganz anders liegt es bei dem zweiten Beispiel, der kinetischen Gastheorie oder, allgemeiner, jeder atomistischen Betrachtung, die durchschnittliche Gesetze über die Bewegung vieler Einzelteilchen aufstellt. Hier ist bei den wichtigsten Behauptungen noch unklar, wie, oder ob überhaupt, sie mathematisch auseinander und den zugrunde liegenden Hypothesen folgen. Auf diese ungeklärten Sachverhalte, deren Aufhellung ein schwierigstes, eigentlich mathematisches Problem ist, bezieht sich *Hilberts* Paradox: „Die Physik ist ja für die Physiker viel zu schwer." Es war seine erste Aufgabe, in einfachster Form die mathematischen Sätze herauszupräparieren, an deren Beweisen es noch fehlt, die Beweise selbst der Zukunft überlassend, und in dieser Weise systematisch alle Gebiete der Physik durchzumustern. Weniges von der geleisteten Arbeit ist an die Öffentlichkeit gedrungen. In Vorlesungen vorgetragen, wird es nur in den Ausarbeitungen in wenigen Exemplaren aufbewahrt. Die einzigen gedruckten Ergebnisse dieser ordnenden Tätigkeit sind die „Begründung der kinetischen Gastheorie" und die „Begründung der elementaren Strahlungstheorie", die beweisen, welche starken mathematischen Hilfsmittel *Hilbert* in den Dienst der Physik gestellt hat. Vor allem aber eines, was nicht genug hervorgehoben werden kann: es galt und gilt für *Hilbert*, fortdauernd in der Physik zu lernen, alle neuen Linien ihres jetzt so wechselvollen Antlitzes in sich aufzunehmen und das Vergängliche von dem Dauernden kritisch zu trennen. *Hilbert* wurde wirklich ganz Physiker. Die berühmte Göttinger „Gaswoche", wo bedeutendste Forscher über die neuesten Entwicklungen der Atomphysik vortrugen, ist sein Werk. Und es soll nicht vergessen werden, daß er als erster in seinen „Grundlagen der Physik" die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie in einem wesentlichen Punkte weiter gebracht hat: die Einführung des Hamiltonschen Prinzips und der Weltfunktion zur Verknüpfung der Gravitation und der elektromagnetischen Erscheinungen stammt von ihm.

Neben den Axiomen der Physik stehen als zweites Kolossalunternehmen die Axiome der Arithmetik. Auch sie gehören den „Anwendungen" der Mathematik an. Es ist eine Anwendung edelsten Sinnes, von unübersehbarer Tragweite: die in der Mathematik geschliffenen und erprobten Methoden der Folgerung werden angewandt zur Durchleuchtung eines übergeordneten Gebietes, der Erkenntnistheorie. Die Axiome der Arithmetik erscheinen in dem Pariser Vortrag an hervorragender Stelle unter den Problemen, auf dem Heidelberger Kongreß im Jahre 1904 trug *Hilbert* einen ersten Entwurf der Ausführung vor, der unverstanden blieb. Es handelt sich um eine völlig neue Fragestellung. Wohl sind die Axiome der Arithmetik seit langem aufgestellt, wohl ist ihre gegenseitige Unabhängigkeit erwiesen, aber es fehlt an dem Wesentlichsten: an dem Beweis ihrer Vereinbarkeit, ihrer Widerspruchslosigkeit. Bei den Axiomen der Geometrie wird der Beweis der Widerspruchslosigkeit so geführt, daß man den geometrischen Gebilden in geeigneter Weise Zahlen zuordnet und zeigt, daß die nach den Axiomen zwischen ihnen bestehenden Beziehungen auf die gewöhnlichen Zahlgesetze hinauskommen, mit anderen Worten, man nimmt für die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome die Autorität eines höheren Gebietes, der Arithmetik, in Anspruch. Aber für die Arithmetik selbst gibt es keine deckende Autorität. Die Berufung auf die Erfahrung, die die widerspruchslose Existenz der ganzen Zahlen zeige, ist ein Zirkelschluß, auch wenn uns nicht nach ungeahnten Enttäuschungen in der Mengenlehre an der Widerspruchslosigkeit unseres Denkens in Zahlen bange geworden wäre. Und es handelt sich um ein höchstes Gut: mit der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome, der Zahlgesetze, steht und fällt unser ganzer Zahlbegriff, existieren oder verschwinden unsere Zahlen. Um aber die Widerspruchslosigkeit zu beweisen, gibt es nur den direkten Weg: es muß gezeigt werden, daß durch keine endlichfache Anwendung der Zahlgesetze aus einer Behauptung *A* die gegenteilige Behauptung Nicht-*A* gefolgert werden kann. Wir sind bei *Goethes* „Müttern", den Göttinnen, die „hehr in Ewigkeit" thronen. Es haben wohl nur wenige Fachgenossen glauben wollen, daß

Hilbert auf diesem Felsen würde Fuß fassen können. Aber im vorigen Jahre (1921) hat er zum erstenmal in Vorträgen, die er in Hamburg gehalten, ein Axiomensystem vorweisen können, dessen Widerspruchslosigkeit aus ihm selbst, ohne Zurückführung auf ein höheres Gebiet, beweisbar ist. So wie der Chemiker *Emil Fischer* die Konstitution der Eiweißkörper dadurch nachwies, daß er an Stelle dieser atomreichen Verbindungen atomärmere mit eng verwandten Eigenschaften synthetisch darstellte, so erweist der Mathematiker die Möglichkeit der inneren Begründung des Zahlsystems zunächst nicht an diesem komplizierten Gebilde selbst, sondern an einem weniger gliederreichen und dadurch zugänglicheren System: und die Leistung ist von gleicher Größenordnung wie die *Emil Fischers*.

Ich möchte diesen Überblick über *Hilberts* wissenschaftliche Leistungen mit einer Bitte an ihn schließen. Er hat in seiner klassischen Periode, ebenso wie *Weierstraß* in der seinigen, in der Hauptsache für sich und seinen Göttinger Schülerkreis gearbeitet, wenig an die Öffentlichkeit gebracht. Die Menge des Neuen, das zu verarbeiten war, mag davon ebenso viel die Ursache sein wie die Scheu, etwas Unvollkommenes, Unvollständiges herauszugeben. Möge er demgegenüber bedenken, welche Fülle von Problemen uns seine bisherigen Ergebnisse erschließen, von Problemen, zu deren Bewältigung Massenarbeit gehört, und uns deshalb seine Erkenntnisse wenigstens in der anspruchslosen und wenig zeitraubenden Form vervielfältigter Vorlesungshefte zugänglich machen!

Hilberts Leistungen haben wir besprochen. Wie ist nun der Mensch *Hilbert*? der wissenschaftliche und der „menschliche" Mensch? Was an den Leistungen auffällt, das ist die merkwürdige Stetigkeit des Fortschreitens, wo an jedes gelöste Problem sich gleich das nächste anschließt. Es sieht fast nach Pedanterie aus, man möchte *Wilhelm Busch* zitieren: „Wohl besorgt ist dieses nun. Julchen kann was anders tun!" Damit verwandt mag auch die Ansicht sein, die in *Hilbert* das Urbild des reinen Logikers, den Sohn der Stadt der reinen Vernunft sieht. Ich glaube, daß *Hilbert* selbst anders beurteilt zu werden wünscht. Je länger, je mehr erkenne ich in ihm den philosophischen Menschen, der, nachdem er sich einmal seiner Kraft bewußt wurde, unwandelbar ein höchstes Ziel im Auge hat und auf wohlüberdachtem Wege ihm zustrebt: das Ziel eines einheitlichen, geschlossenen Weltbilds, wenigstens im engeren Bereich der exakten Wissenschaften. Es mag sein, daß dem Mathematiker überhaupt dieser Drang innewohnt, die Wissenschaft der unendlichen Verknüpfungen ermutigt dazu. Aber der Drang hilft nichts, wenn ihn nicht ein großer ordnender Gesichtspunkt leitet. Diesen hat *Hilbert* in der Axiomatik gefunden. Es scheint mir zweifellos, daß er für die Nachwelt immer der Axiomatiker sein wird, der Mann, der der Logik eine neue Ausdrucksform verliehen hat. Und es gehört noch mehr dazu: eine rücksichtslose Ehrlichkeit gegen sich selbst, ein schonungsloses Aufspüren und Ausscheiden des Halbverstandenen oder, bei einigen Glücklichen, eine natürliche Naivität des Denkens, die sich von keiner Autorität, auch nicht von der der Vergangenheit, etwas einreden läßt. Zu diesen Glücklichen, glaube ich, gehört *Hilbert*: und zwar nicht nur in wissenschaftlicher Hinsicht. Und noch etwas ist not: ein Wille; und wer einmal den Hilbertschen Willen hat kennen lernen, der weiß ihn zu achten — und gelegentlich auch zu fürchten. Immer bestimmt, meist gemäßigt und mild, mitunter aber auch jäh und leidenschaftlich, leitet er Leben und Arbeit. *Hilbert* hat sich genau die Lebensbedingungen geschaffen und in allem Wechsel der Zeit erhalten, die seiner Arbeit am zuträglichsten sind. Er ist Individualist und seine Leistungen geben ihm das Recht dazu. *Hilbert* ist kein „Organisator", im Gegenteil sind ihm Geschäfte beschwerlich. Aber *Klein*, der große Organisator der Göttinger mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät, erkennt freudig an, wieviel von seiner Größe Göttingen nicht nur der wissenschaftlichen Bedeutung, sondern gerade dem Willen *Hilberts* verdankt, dem Willen, dessen hohen Zielen nachgebend, das Preußische Ministerium im Jahre 1902 eine neue Professur für *Minkowski* bewilligte, und der sich bei allen weiteren Besetzungen durchdacht, energisch und glücklich geäußert hat. *Hilbert* in der Diskussion wissenschaftlicher Gegenstände ist lebhaft, mitreißend, in der Abweisung verfehlter Gedanken schroff, in der Disputation über nicht beweisbare, sondern nur gefühlsmäßig entscheidbare Dinge ist er leidenschaftlich bis zur Heftigkeit. Sein „Aber nein!" ist bekannt. *Hilbert* bei der Arbeit ist eine merkwürdige Erscheinung. Äußerlich ist nicht viel zu merken, man trifft ihn vielleicht bei gärtnerischer Beschäftigung. Aber die ersten Worte zeigen, daß er mit größtem Eifer an einem Problem schafft. Wenn nicht der Besuchende ein wichtiges eigenes Anliegen mitbringt, kommt das Gespräch sofort auf *Hilberts* Gedanken und führt die Untersuchung fort. Bei einer Unterhaltung über die Charaktereigenschaften verschiedener großer Männer hob *Hilbert* nachdrücklich hervor, daß sie ihren Erfolg ganz wesentlich ihrem Fleiße zu danken hätten. Ich halte ihn selbst für leidenschaftlich fleißig. Er hat in hervorragendem Maße die Eigenschaft der Mathematiker, fern vom Arbeitstisch und in allen Situationen über seine Mathematik nachdenken zu können. Berühmt sind seine mathematischen Spaziergänge, die er in Königsberg mit *Hurwitz* und *Minkowski*, in Göttingen mit Kollegen, mit ausgewählten Schülern, eine Zeit lang sogar mit

dem großen Schwarm seines Seminars, zu *Minkowskis* Zeit mit diesem allein oder in Familie, und „jeden Donnerstag pünktlich drei Uhr" mit den mathematischen Ordinarien unternahm. Dabei wurde die lebhafte Bewegung des mathematischen Gesprächs durch lebhafte körperliche Bewegung ergänzt, wie die regelmäßige „Erstürmung des 203-m-Hügels" — eine Erinnerung an den russisch-japanischen Krieg — beweist. *Hilbert* ist kein Leser, kein Gelehrter im Sinne des Büchermenschen. Er läßt sich lieber erzählen und behält. Als ich während meiner Doktorarbeit ihm trübselig berichtete, daß ich meine schönste Entwicklung nachträglich in einer älteren Arbeit bereits vorhanden gefunden hätte, sagte er nur: „Warum kennen Sie auch so viel Literatur!" Trotzdem hat er für seinen Zahlbericht eine sehr schwierige Literatur in ihre Tiefen durchgeforscht, hat, um sich in die Physik einzuarbeiten, umfangreichste Buchstudien getrieben. Das sind Äußerungen des Hilbertschen Willens.

Hilberts Wille will Hohes und ist gütig. Seine Güte haben seine Schüler in reichem Maße erfahren. Durch die Güte geklärt, konnte sich sein Verstand in seinen Ratschlägen an uns bis zur Weisheit erheben — ich gebrauche dieses starke Wort, weil ich kein anderes finde, das meinen Eindruck wiedergibt. *Hilbert* steht mit seinen Schülern und der jungen Generation einfach auf dem Fuße der Gleichheit, und zwar geschieht dies vollständig ungewollt und unbefangen. „Ich setze mich zu den Jungen; bei denen ist doch etwas zu holen", erklärte er auf einer Naturforscherversammlung. Das günstige Schicksal hat ihm einen jugendlichen Körper verliehen, zum Gehen und Radfahren so behend wie ehedem, die geistige Jugend erhält er sich geflissentlich durch Anschluß an die jüngste Generation. Alle, die im Hilbertschen Hause aus- und eingegangen sind, werden bei der Hilbertfeier mit Vergnügen und mit Rührung sich der Stunden mit ihm erinnern: der Spaziergänge durch schweren Sturzacker unter Zahlkörpergesprächen, der Wandelhalle mit der langen Wandtafel im Hilbertschen Garten, der improvisierten Tanzvergnügen bei weggerolltem Teppich unter Grammophonbegleitung, wo *Hilbert* die Française kommandierte, der vielen Originale, die um die speisenschweren Tische herum unter tief-mathematischen Reden schmausten, der übermütigen Geburtstagsfeiern mit ihren übermütigen Aufführungen. Und *Hilbert* in der Mitte, rasch wechselnd zwischen ernstester Wissenschaft und animiertester Gesellschaftsstimmung, und neben ihm Frau *Käthe Hilbert* mit ihrer Gastfreundschaft, ihrer kräftigen Art, ihrem herzlichen Wohlwollen und ihrer scharfen Kritik.

Noch einige Worte über *Hilbert* als Lehrer. Eine gut vorbereitete Vorlesung bei *Hilbert* ist ein besonderer Genuß. Keinerlei rhetorischer Schmuck: im Gegenteil, die absichtliche mehrfache Wiederholung wichtiger Stellen ist vom Gesichtspunkt der rednerischen Schönheit bedenklich. Aber eindringlich wirken die einfachen, natürlich und logisch aneinandergereihten Sätze, eindringlich der Ernst und die Angespanntheit des Vortragenden, dessen schnellen Bewegungen und vorgestrecktem Kopfe man die innerliche Mitarbeit ansieht, und der Kundige schaut sogleich, der Lernende erkennt im Rückblick die hohen und klaren Gesichtspunkte der Disposition und die überall einfließenden originalen Wendungen. Noch mächtiger wirken die Vorlesungen, in denen *Hilbert* die Ergebnisse seiner neuesten Forschungen vorträgt. Es ist nicht leicht, bei *Hilbert* als Doktorand zugelassen zu werden, noch weniger leicht, die von ihm gestellten Aufgaben zu bewältigen. In den Thematen seiner Doktorarbeiten offenbart sich die Vielseitigkeit der in seinem Geiste gleichzeitig vorhandenen Interessen, die in der eigenen Publikation so streng zurückgeschnitten ist. Ich denke an Dissertationen über ganze transzendente Funktionen, Stieltjessche Kettenbrüche, Doppellimes, komplexe Multiplikation, Flächentheorie, Tschebyscheffsche Näherungsmethoden, Modulfunktionen zweier Veränderlicher, Topologie algebraischer Kurven und Flächen u. a., während ich die Menge derjenigen, die enger an Hilbertsche Arbeitsgebiete anknüpfen, übergehe. Viele dieser Dissertationen sind vorzüglich, in ihrer Gesamtheit bilden sie einen Schatz. Wieviel in ihnen von *Hilbert* selbst herrührt, läßt sich nicht entscheiden, wird von Fall zu Fall sehr verschieden gewesen sein. Sicher ist, daß alle Doktoranden, die sich mit Schwierigkeiten an *Hilbert* gewandt haben, immer Rat und hilfreiche Tat bei ihm gefunden haben. Diese Schüler alle und die vielen, die als reifere Männer nach Göttingen zu ihm kommen, vor allem die jungen Göttinger Dozenten, erfüllen sich in Berührung mit ihm mit seiner Begeisterung für die Mathematik und für die wissenschaftliche Wahrheit. Sie werden seine „Schüler" im weitesten Sinne, und wer einmal wieder schwach im Glauben wird, pilgert gern nach Göttingen und läßt sich „auffrischen".

Denn in *Hilbert* lebt der Glaube an die Macht des menschlichen Geistes. Aus seinem Pariser Vortrag stammt ein Wort, das so sehr sein inneres Evangelium ausspricht, daß er es kürzlich wieder zum Schlußwort einer Vorlesung gemacht hat: „Wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus."

Der Algebraiker Hilbert.

Von O. Toeplitz, Kiel.

Hilbert als Algebraiker und Arithmetiker einem weiteren Kreise zu schildern, erscheint als eine Unmöglichkeit. Und, was den Arithmetiker betrifft, so ist es und bleibt es auch eine solche. Ein Mathematiker, der in dem Wirkungsradius eines Kunstwerks einen wesentlichen Faktor seines gesamten Wertes sieht, wird sich nicht leicht dieses Eingeständnis abringen, daß der erhabenste Teil seiner Wissenschaft einen so kleinen Aktionsbereich haben soll; mit wehmütigem Neid wird er zusehen, wie der Musiker, der Maler alle Welt mit seinen Schöpfungen erfreut, wie zurzeit selbst der astronomische Nachbar mit seinen Fixsternbewegungen, wie der physikalische mit seinen noch in verzaubertem Halbdunkel zirkulierenden Elektronen, mit seiner Umformung von Raum- und Zeitbegriff die Gemüter der Gebildeten bewegt. Derjenige aber, der in Weltabgeschlossenheit einen Ruhmestitel der Mathematik erblickt, der eine mathematische Theorie nur dann höchsten Reizes wert findet, wenn sie nur weniger Gelehrter Gemeingut zu sein vermag, wird in *Hilberts* zahlentheoretischen Arbeiten, auch ohne sie noch zu kennen, den Kern seiner Leistung vermuten. Und in Wahrheit hat *Hilbert*, vielleicht auch nach seinem eigenen Bewußtsein, seine stärkste Kraft an dieses Gebiet gewendet. Er hat aus *Kummers* schwer zugänglichen, von induktivem Material übervollen Arbeiten, die wenige vor ihm gelesen haben, und die nach ihm und dank ihm heute nur wenige noch zu lesen brauchen, eine Welt von allgemeinen Tatsachen und Thesen herausgeholt; er hat den unstet dahineilenden Fluß der Idealtheorie in feste, weite Ufer gebannt und ein Stauweiher errichtet, aus dem der nun breit dahinfließende Strom seine stetigen Kräfte bezieht.

Von dem Algebraiker *Hilbert* zu erzählen, so zu erzählen, daß der Naturwissenschaftler ein Bild erhält, und selbst derjenige einen Eindruck, dessen mathematische Exerzitien bei der Gleichung der Ellipse aufgehört haben, ist vermessen. Die Algebra ist nicht minder weltfremd wie ihre arithmetische Schwesterdisziplin. Indessen *Hilbert* nimmt zur Algebra eine besondere Stellung ein. Seine Methoden sind von einer ganz anderen Art wie die eines *Kronecker*, *Frobenius*, *Gordan*; es sind Methoden, auf die bei ihrem Auftreten keiner der Beteiligten gefaßt war. Algebraische Probleme, die jeder Anstrengung gespottet hatten, erlegt er damit, wie David den Riesen Goliath. Solche Kampfesart vermag vielleicht das Interesse auch derer zu finden, die sich sonst unter dem Goliath Algebra nichts anderes vorstellen als einen besonders großen Philister. Und dieser Schimmer einer Möglichkeit, von dem Algebraiker *Hilbert* zu erzählen, soll deshalb nicht ungenutzt bleiben, weil sich in seinen algebraischen Forschungen ein Wesenszug offenbart, der sich von dem Hintergrunde der Algebra plastischer abhebt als von dem seiner vielen anderen Arbeitsgebiete, und der ein Grundpfeiler ist für die Analyse des mathematischen Menschen *Hilbert*. In diesem Sinne soll der Versuch unternommen werden.

1.

Hilberts erste und umfassendste algebraische Leistung gehört der Invariantentheorie an. Diese Disziplin stand in der Zeit von 1860—1890 in Deutschland auch in höchster Blüte; ihre Technik hat der junge *Hilbert* intensiv in sich aufgenommen und weiterhin so bewahrt, wie man nur bewahrt, was einem in der frühesten Jugend eingeprägt worden ist. Seine entscheidende Leistung auf diesem Gebiete beruht allerdings keineswegs auf dieser Technik; darum ist es auch ganz einfach, sie hier zu kennzeichnen, wenn man nur zuvor die Idee, die überhaupt der Invariantentheorie zugrunde liegt, verdeutlicht hat. Durch die weite Verbreitung, die der Relativitätsgedanke heute gefunden hat, scheint überdies dem weit einfacheren Invariantenbegriff der Weg ins naturwissenschaftliche und philosophische Publikum vollends geebnet.

Die Grundidee von *Descartes*, mittelst zweier zueinander senkrechter Achsen jede geometrische Figur in ein Rechending umzuwandeln, ist wunderschön; sie hat nur den einen Mangel, daß jenes Rechending nicht allein von der vorliegenden Figur, sondern auch noch von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Verlegt man dieses, so entspricht der nämlichen Figur ein anderes Rechending. So lautet z. B. die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

wenn man die Achsen der Ellipse als Koordinatenachsen wählt; legt man ein anderes Koordinatensystem zugrunde, so wird die Gleichung der Ellipse in irgendeine andere Gleichung 2. Grades zwischen x und y übergehen, von der Form:

$$a x^2+2 b x y+c y^2+d x+e y+f=0 \quad . \quad (2$$

Es ist dies deshalb so unangenehm, weil man beim Operieren mit diesem Rechending, wenn man sorglos rechnet, jeden Augenblick auf Ausdrücke stößt, die nicht mehr an der Ausgangsfigur geometrisch gedeutet werden können, die also für das geometrische Ziel der Untersuchung abwegig sind. Würde man z. B. aus (2) im Laufe der Rechnung den Ausdruck

$$\frac{d^2-4af}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

ableiten, so träte dieser Fall ein. Natürlich wäre es leicht, auch diesen Ausdruck zu deuten: er ist

das Quadrat des Abstandes der beiden Schnittpunkte der Ellipse mit der x-Achse voneinander. Aber das ist keine der Figur der Ellipse als solche eigentümliche Größe; denn sie verändert sich, wenn man unter Festhaltung der Ellipse die x-Achse verlegt.

Dem *Physiker* — das sei für diesen eingeschaltet — ist dieser Übelstand wohlvertraut, und er ist für ihn der Anlaß, sich der Vektorrechnung zu bedienen. Denn der Skalar eines Vektors:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

hat die angenehme Eigenschaft, bei jeder Drehung des räumlichen Koordinatensystems ungeändert zu bleiben; und für die Figur zweier Vektoren hat außer ihren beiden Skalaren noch ihr inneres Produkt das gleiche Verhalten:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ r_1 r_2 \cos\varphi &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}\right\} \quad (5$$

Wenn man also diese Größen besonders benennt und, anstatt mit den einzelnen Koordinaten zu rechnen, sich auf einen Kalkül mit diesen Größen beschränkt, so ist man sicher, immer im Rahmen solcher Bildungen zu bleiben, die eine unmittelbare Deutung an der Figur der vorgelegten Vektoren gestatten.

Schon lange vor den Physikern hatten die *Geometer* an diesem Übelstand der analytischen Geometrie das gleiche Ärgernis genommen und sich deshalb von ihr abgewendet; so war in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die synthetische Geometrie zur Blüte gelangt, die rein geometrisch an den Figuren operiert. Ihr Wettbewerb hat die analytischen Geometer dazu gedrängt, auch ihrerseits diesem Übelstande Rechnung zu tragen; das Ergebnis war die *Invariantentheorie*. Man lenkte seine Aufmerksamkeit systematisch auf diejenigen Ausdrücke, die bei jeder Verlegung des Koordinatensystems ihren Wert behalten und nannte sie „Invarianten". Die Ausdrücke (4) und (5) der Vektorrechnung sind also Invarianten; im Bereiche der Ellipsenfigur wären u. a. — man kann es unschwer nachrechnen —

$$j_1 = a + c,\ j_2 = ac - b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

invariante Ausdrücke, also Ausdrücke, die eine geometrische Deutung an der Ellipse gestatten. Diese Deutung ist leicht gefunden; denn wegen ihrer Invarianz behalten diese Ausdrücke ihren Wert, wenn man das Koordinatensystem z. B. in die Ellipsenachsen legt; dabei geht die Gleichung (2) der Ellipse in die Form (1) über, es wird also:

$$a = \frac{1}{p^2},\ b = 0,\ c = \frac{1}{q^2}$$

und daher:

$$j_1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2},\ j_2 = \frac{1}{p^2 q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7$$

Da p, q die Längen der Achsen der Ellipse sind, sind j_1, j_2 hiermit wirklich geometrisch gedeutet; übrigens folgt — was bald gebraucht wird — umgekehrt durch Auflösung von (7):

$$\frac{1}{p^2} = \frac{j_1 + \sqrt{j_1^2 - 4j_2}}{2},\ \frac{1}{q^2} = \frac{j_1 - \sqrt{j_1^2 - 4j_2}}{2} \quad . \quad (8$$

Wir können uns nun dem Gedankeninhalt des Hilbertschen Theorems einen Schritt nähern, indem wir zum Begriff des *vollen Invariantensystems* aufsteigen. Es ist dem Physiker durchaus geläufig, daß man aus der Figur zweier Vektoren im wesentlichen nichts anderes bilden kann als die drei Ausdrücke (5); alles andere sind Derivate davon; denn durch r_1, r_2, φ ist offenbar die ganze Figur der beiden Vektoren geometrisch bestimmt. Damit ist ein Überblick über *alle* Invarianten dieser Figur gefunden. Aber der Kernpunkt der Angelegenheit ist dabei noch nicht eigentlich berührt; er wird am Beispiel der Ellipse deutlicher hervortreten. Auch hier ist klar, daß eine Ellipse durch die beiden Achsenlängen p, q geometrisch völlig bestimmt ist (Ellipsen mit den gleichen Achsenlängen sind kongruent), daß also *alle* Invarianten sich durch p und q ausdrücken müssen; und da p, q ihrerseits vermöge (8) durch j_1, j_2 ausgedrückt sind, müssen sich also auch alle Invarianten durch j_1, j_2 ausdrücken lassen; z. B. wird, um einen simplen Fall zu nehmen, das Achsenquadrat p^2 selbst, das eine unmittelbare geometrische Deutung hat, wie man aus (8) abliest, sich als

$$p^2 = \frac{2}{j_1 + \sqrt{j_1^2 - 4j_2}}$$

ausdrücken. Damit ist wiederum ein vollständiger Überblick über sämtliche Invarianten der Figur gewonnen; aber der Kernpunkt der Sache ist ein anderer: In den Ausdruck für p^2 geht ein Wurzelzeichen ein; es wird in Anbetracht dessen also etwas ganz Besonderes sein, wenn man aussagt: ist eine Invariante eine *ganze rationale* Funktion von a, b, c, d, e, f, so läßt sie sich stets als *ganze rationale* Verbindung von j_1, j_2 darstellen, wie z. B.:

$$(a-c)^2 + 4b^2 = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = j_1^2 - 4j_2{}^1)$$

[1]) Der Leser, der noch einen Augenblick hierbei verweilen will, kann sich auch von dem *Beweise* dieser Tatsache und damit von ihrem *Kaliber* eine Vorstellung machen. Denn da j invariant sein soll, muß speziell

$$j(a, b, c, d, e, f) = j\left(\frac{1}{p^2}, 0, \frac{1}{q^2}, 0, 0\right) = R\left(\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}\right)$$

sein; weil es eine ganze rationale Funktion sein soll, ist es also auch eine ganz rationelle Verbindung von $\frac{1}{p^2}$ und $\frac{1}{q^2}$. Wegen der Invarianz gilt aber das gleiche, wenn man das Koordinatensystem nochmals abändert, jedoch nur so, daß die beiden Ellipsenachsen ihre Rolle vertauschen; daraus geht hervor, daß R eine symmetrische Verbindung seiner beiden Argumente ist:

$$R\left(\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}\right) = R\left(\frac{1}{q^2}, \frac{1}{p^2}\right)$$

und es ist nun ein fundamentaler Satz der Algebra, der sog. Satz von den symmetrischen Funktionen, der besagt, daß alle symmetrischen Verbindungen zweier Argumente sich ganz rational aus deren Summe und deren Produkt zusammensetzen lassen, also wegen (7) gerade aus den beiden Größen j_1, j_2.

Erst auf Grund dieses Tatbestandes nennt man j_1, j_2 ein „volles Invariantensystem" der Ellipsenfigur.

Das fundamentale Problem der Invariantentheorie besteht nun darin, zu irgendeiner gegebenen Figur das volle Invariantensystem aufzustellen, d. h. ein System von ganzen, rationalen Invarianten, durch die sich alle übrigen ganzrational ausdrücken lassen, und man wird aus den erörterten Beispielen einen Begriff von der Natur dieses Problems entnehmen. Nur muß man hinzufügen, daß die klassische Invariantentheorie sich in Wahrheit vorzugsweise mit solchen Ausdrücken befaßt, die nicht nur bei starrer Verlegung des Koordinatensystems unverändert bleiben, sondern auch beim Übergang zu schiefwinkligen Koordinaten oder zu denjenigen noch allgemeineren, die der Geometer projektive nennt; auch *Hilberts* Arbeiten gelten ganz Invarianten in diesem Sinne. Der Leser wird sich vorstellen, daß bei Figuren, die nicht aus einer Ellipse, sondern aus einer Kurve oder Fläche höherer Ordnung oder gar aus mehreren solchen Gebilden besteht, die Aufstellung des vollen Invariantensystems sehr viel schwieriger ist als in dem Falle der Ellipse. Ja es ist zunächst überhaupt fraglich, ob man bei einer solchen beliebig verwickelten Figur stets eine *endliche* Anzahl von Invarianten herausgreifen kann, durch die sich alle anderen ganz-rational ausdrücken lassen. Dieses *Problem von der Endlichkeit des Invariantensystems* ist es, das *Hilbert* gelöst hat.

Durch Ausbildung einer besonderen Technik hatten die Invariantentheoretiker vor *Hilbert* für immer verwickeltere Figuren die Aufstellung des vollen Invariantensystems auszuführen versucht; es waren gigantische Rechnungen, mit denen *Gordan* das Problem auf diesem expliziten, konstruktiven Wege hatte meistern wollen, und im Falle eindimensionaler Figuren tatsächlich gemeistert hatte. Es ist unmöglich, von dem Gedanken, mit dem *Hilbert* es bewältigte, so wunderbar durchsichtig er ist, hier einen Begriff zu geben. Aber es geht auf Grund der entwickelten Vorstellungen — und dazu wurden sie so ausführlich gegeben — immerhin an, das Verhältnis der Hilbertschen Methode zu derjenigen von *Gordan* zu kennzeichnen, also den Zug, der für diese Skizze hier der wesentliche ist.

Wenn man das Verfahren analysiert, mit dem *Hilbert* die Existenz des endlichen Invariantensystems erweist, so steht am Anbeginn desselben etwa eine Schlußweise wie diese: unter allen Invarianten der vorgelegten Figur muß sich eine von möglichst niedrigem Grade befinden; wie man sie findet, ist eine andere Frage, aber es ist klar, daß es eine solche geben muß; sei j_1 eine solche. Und aus dieser einen j_1 werden dann durch eine Folge ähnlicher und immer komplizierterer Schlüsse die übrigen aufgebaut, bis das volle System fertig ist. Wollte man aus diesem Beweise ein Verfahren extrahieren, um im Falle einer einzelnen Figur tatsächlich das volle System aufzustellen, so würde man dafür keinerlei Handhabe finden; und fände man sie, so würde man auf diesem Wege zu einem Verfahren gelangen, das schon bei den einfachsten Figuren, deren volles System man anderweit beherrscht, von einer lächerlichen Kompliziertheit wäre. Eben das war die große Überraschung an *Hilberts* Lösung, und es ist ihr Kernpunkt: *Hilbert* erkannte, daß eine faktische Aufstellung des vollen Systems im allgemeinen Falle unerreichbar ist und zeigte, daß man das Problem lösen kann, indem er auf das *einfache* Verfahren zur faktischen Herstellung verzichtete. Es ist charakteristisch, wie *Gordans* ganzes Gefühl sich zuerst dagegen auflehnte, was hier geschah; sein eigenes großes Ziel war hier erreicht, aber unter Preisgabe aller der imponderablen Nebenforderungen, die in seinem Bewußtsein und in dem der meisten Invariantentheoretiker unlösbar mit der Bezwingung des Problems verbunden gewesen waren.

Der weitere Verlauf der Angelegenheit beleuchtet diese Sachlage noch greller. *Hilbert* schritt über den Endlichkeitssatz sofort hinaus zum positiven Aufbau einer Theorie der Invariantenkörper, d. h. zu dem näheren Studium derjenigen Umstände, die dem vollen Invariantensystem durch den Zusatz des Wortes „ganz rational" erwachsen — Umstände, die in dem einfachen Beispiel der Ellipsenfigur sich noch nicht bemerkbar machen, aber bei einer Figur, die aus einem Vektor und einem Tensor besteht, bereits auftreten[2]). Aber die übrigen Invariantentheoretiker nahmen daran keinen aktiven, mitarbeitenden Anteil; es hätte wohl eine neue Generation von Invariantentheoretikern erst heranwachsen müssen, die dazu gewillt gewesen wäre. Ehe es dazu kam, war die Invariantentheorie längst aus der Mode und auch *Hilbert* hatte seinen isolierten Posten verlassen und sich der Zahlentheorie zugewendet. Nur die Theorie der Formenmoduln, die er in diesem Zusammenhange geschaffen hatte, ist bis zum heutigen Tage lebendig geblieben, übrigens ohne seine weitere eigene Mitwirkung. Sie hat sich als berufen erwiesen, für den Problemkreis des sog. Noetherschen Theorems ähnliches zu leisten, wie *Hilberts* Endlichkeitssatz für die Invariantentheorie: nämlich die genauere Einsicht in die Natur der Singularitäten algebraischer Kurven und Flächen, die *Noether* für den Fall ebener Gebilde durch sein Theorem explicite erlangt hatte, und die im Raume angesichts der Kompliziertheit der Tatsachen, wie es scheint, nicht ebenso explicite erlangt werden kann. Und hier ist es *Noether*, der soeben dahingeschiedene Nestor der algebraischen Geometrie,

[2]) Hier lassen sich alle Invarianten der Figur durch 6 unter ihnen ausdrücken; aber damit es ganz — rational gehe, wie im Falle der Ellipse mit j_1, j_2, muß man noch eine siebente hinzufügen, die sich ihrerseits mit Hilfe von Wurzelzeichen durch die ersten 6 ausdrücken läßt.

selbst, der unablässig in diese Richtung gewiesen hat.

2.

Seither hat *Hilbert* noch wiederholt die algebraische Feder ergriffen. Es wäre sehr reizvoll, die ganze Reihe dieser kleineren, in sich abgerundeten Arbeiten, zu analysieren und ihre methodische Verwandtschaft mit der Invariantenarbeit aufzuweisen; aber es würde einen zu starken Apparat erfordern, den Titeln: „Construction algebraischer Gleichungen jeden Grades ohne Affekt", „Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten", „neuer Beweis der Transcendenz der Zahlen e und π" (der einfachste und gangbarste, den wir besitzen), „Lösung des Waringschen Problems" einen weithin hörbaren Klang zu verleihen. Denn es genügt für den Zweck, den sich diese Studie gesetzt hat, nicht, die Tatsachen zu skizzieren — das wäre bei einzelnen dieser Gegenstände durchaus möglich —, sondern es gilt das Wesen der Methoden herauszuheben.

Aber *Hilbert* hat noch einmal eine umfassende algebraische Leistung vollbracht, in der *Theorie der Integralgleichungen* und *unendlichvielen Variabeln*, deren analytische Seite an anderer Stelle dieses Heftes zur Geltung kommt. Eine große Reihe der verschiedenartigsten Theorien hat er hier zu einem gemeinsamen Ganzen vereinigt: die Untersuchungen von *H. A. Schwarz* über eine in eine irgendwelche Kontur eingespannte, schwingende Membran, die *Picard* und *Poincaré* fortgesetzt hatten, die Untersuchungen von *C. Neumann*, *Robin* und *Poincaré* über die Randwertaufgaben der Potentialtheorie, von denen aus *Fredholm* die Integralgleichungen entdeckt hatte, die Arbeiten *Helge von Kochs* über unendliche Determinanten, die Stieltjessche Kettenbruchtheorie, die von *Liouville* ausgehenden Entwicklungssätze nach Eigenfunktionen linearer Schwingungsvorgänge, das Riemannsche Problem mit seinen Kontinuitätsmethoden u. a. m. Das einigende Band für alle diese Theorien ist ein *algebraischer Gedanke*. Und nun ist es sehr bezeichnend, in welcher Weise sich dieser Gedanke von allen diesen einzelnen vorher vorhandenen Theorien seiner ganzen Wesensart nach abhebt. Es sei an einigen der eklatantesten Beispiele erläutert.

Helge von Koch entwickelt eine Theorie der unendlichen Determinanten, um daraus die Auflösung unendlich vieler Gleichungen ersten Grades mit unendlichvielen Unbekannten abzuleiten. Und in der Tat beweist er ganz nach dem Muster der üblichen Theorie: wenn die unendliche Determinante von Null verschieden ist, ist das unhomogene Gleichungssystem bei beliebigen rechten Seiten lösbar, wenn sie verschwindet, das homogene, usf. Dabei muß er über die Koeffizienten des Gleichungssystems gewisse Konvergenzvoraussetzungen machen, damit seine unendliche Determinante konvergiere. *Hilbert* streift sofort den formalen Apparat expliziter, konstruktiver Lösungsformeln von dem Gegenstande ab, d. h. die Determinante schält diejenigen Tatsachen aus der Theorie heraus, die von diesem formalen Apparat frei sind (z. B. aus den genannten beiden Sätzen von *Helge von Koch* den alternativen Satz, daß entweder die unhomogenen Gleichungen bei beliebigen rechten Seiten *oder* die homogenen Gleichungen lösbar sind) und sucht die wahren Bedingungen für diese nackten Tatsachen der Lösbarkeit der Gleichungen. Er findet, daß die wahren Bedingungen sehr viel weitere sind, und auch sehr viel natürlichere als die Konvergenzbedingungen, die *Helge von Koch* angegeben hatte, um der Konvergenz seiner Determinante sicher zu sein.

H. A. Schwarz bestimmt aus der Kontur seiner schwingenden Membran (es ist Nebensache, daß er sich dieser Einkleidung nicht bedient) ihren Grundton durch ein iteratives Verfahren, das einem Verfahren der Algebra zur Bestimmung der Achse eines Ellipsoids (aus seiner Gleichung in der allgemeinen Form) in wunderbarer Weise nachgebildet ist. Der Embryo von *Hilberts* Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern liegt hier zutage. Aber mit bewußter Absichtlichkeit, die er seinen Schülern als Vorbild hinstellt, vermeidet es *Schwarz*, die großen, die allgemeinen Gesichtspunkte auszusprechen und beschränkt sich darauf, einen großen Gedanken, dessen Tragweite er kennt, an einem konkreten Einzelfall in realer Konstruktion, mit expliziten Formeln durchzuführen. Hatte *Schwarz* so gewissermaßen die Hauptachsen eines ganz speziellen, bestimmten Ellipsoids im Raume von unendlich vielen Dimensionen untersucht, so wendet sich *Hilbert* sofort zu dem allgemeinen Ellipsoid in diesem Raume und sucht die wahren Bedingungen, unter denen Grundton und Obertöne, d. h. aber alle unendlichvielen Hauptachsen nachweisbar sind. Er findet, daß dies unter Bedingungen von schönster Einfachheit und Allgemeinheit der Fall ist, Bedingungen, unter denen jenes iterative Verfahren von *Schwarz* durchaus nicht mehr immer funktioniert. Und er spannt schließlich jene Bedingungen zu solcher Weite, daß selbst die Kettenbruchtheorie von *Stieltjes* ihnen als die Theorie einer besonderen Art von Ellipsoiden unterbegriffen werden kann, eine Theorie, die einer gänzlich anderen Sphäre entstammt. Der elegante formale Apparat, auf dem *Stieltjes* diese bewunderungswürdige Theorie aufgebaut hat, geht bei *Hilbert* über Bord; durch ein Auswahlverfahren erzwingt er *die* Tatsachen bei den allgemeinen Ellipsoiden, die *Stieltjes* mutatis mutandis bei seinen speziellen erlangt hatte.

So hat *Hilbert* in seiner Theorie der unendlichvielen Variabeln ein großes Haus errichtet, in dem viele einzelne Untersuchungen geräumige Wohnungen gefunden haben; bequeme Treppen führen von einem Stockwerk zum anderen; In-

sassen, die vorher einander nicht gekannt hatten, verkehren hier freundschaftlich miteinander. Manche von ihnen auch sind enttäuscht; sie hatten sich ihre Zukunft nicht so vorgestellt, manch imponderabler Traum ihrer Jugend war hier nicht erfüllt. Aber es ist ein freies Haus, in dem sie wohnen, keinem ist es benommen, den alten Traum zur Erfüllung zu bringen; und es ist festgefügt, daß niemand es mehr einzureißen vermag.

3.

So steht der Algebraiker *Hilbert* in ausgeprägter Eigenart vor uns, wie nicht ein jeder Mathematiker. Aus allen Problemen greift er die harten Tatsachen heraus, die klar entscheidbaren Fragen, bei denen man von der Überzeugung durchdrungen ist: entweder sind sie lösbar, oder man kann den Beweis der Unlösbarkeit führen. Sein bekannter Pariser Vortrag über die mathematischen Probleme ist ein bewußter, großer Hymnus auf das klar Entscheidbare. Betrachtet man die Mathematik, nicht wie sie sein könnte, sondern wie sie wirklich ist, als Summe allen mathematischen Geschehens, so gewahrt man, daß sie mit dem klar Entscheidbaren nicht erschöpft ist, daß sie von Imponderabilien wimmelt. Es gibt synthetische Geometer, die etwas „rein geometrisch" oder „rein projektiv" machen wollen, Algebraiker, die in der Kunst einer symbolischen Schreibweise, einer Bezeichnungsart, in der „Reinheit" eines Beweises den ästhetisch vollkommenen Ausdruck einer Sache durch die Form suchen; es gibt Funktionentheoretiker, die etwas „elementar", soll heißen ohne den Cauchyschen Integralsatz beweisen wollen, und sie zählen keinen geringeren als *Weierstraß* zu den ihrigen; der angewandte Mathematiker will die Wurzel einer Gleichung „möglichst rasch" auf 3 Dezimalen besitzen, und es gibt keinen exakten quantitativen Maßstab der Raschheit. Es ist nicht die Absicht dieser Zeilen, zu solchen Neigungen Stellung zu nehmen, sie für berechtigt oder unberechtigt zu erklären. Der Zweck war nur, das scharfe Profil sichtbar zu machen, das *Hilbert* von dieser Seite her zeigt.

Die Frage der Grundlagen der Mathematik ist heute von neuem aufgerührt worden. *Brouwer, Weyl* haben das Wort ergriffen und *Hilbert* selbst ist wieder auf die Mauer gestiegen. Es ist unverkennbar, daß *Weyl* und *Brouwer* gegen die axiomatische Denkweise *Hilberts* Stellung nehmen, daß sie die mathematischen Dinge nicht indirekt aus ihren Eigenschaften, sondern direkt durch positive Konstruktionen hergestellt wissen wollen, die werdende Folge usw.; der Ruf der Rückkehr zu *Kronecker*, dem sich *Hilbert* stets entgegengesetzt gefühlt hatte, erklingt. Man hat im Laufe der Geschichte der Mathematik stets nach den Grundlagen gegriffen, wenn der *wirkliche* Betrieb der Wissenschaft irgendeinen Anlaß dazu gab. Es drängt sich die Frage auf, ob das heute der Fall ist. Offen gewiß nicht. Aber im Verborgenen könnte man einen unbewußten Zusammenhang ahnen zwischen den Gegensätzen der Grundlagendebatten und den gegensätzlichen Tendenzen mathematischer Forschung, einer etwaigen Reaktion gegen den Algebraiker *Hilbert*, wie er hier gesehen wurde. Ich möchte die Sachlage so formulieren: nur wenn die Grundlagenkämpfer es verstehen werden, sich zu Interpreten solcher tatsächlich im Forschungsbetriebe bestehenden Gegensätzlichkeiten zu machen, werden sie Boden fassen und etwas Wirksames leisten können.

Hilberts geometrisches Werk.

Von M. Dehn, Frankfurt a. M.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie haben seit dem Altertum fast alle Mathematiker angezogen. Im Beginn des 19. Jahrhunderts bekommen sie mit Entstehung der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie den Reiz geheimnisvoller, schwer verständlicher, kühner und fast verbotener Forschung. Die 1899 zuerst veröffentlichten „Grundlagen der Geometrie" von *Hilbert* enthalten Untersuchungen großer Kühnheit, aber restloser, radikaler, manchmal fast primitiver Klarheit. So ist es zu erklären, daß dieses, jetzt erheblich erweiterte Werk, obwohl in ihm eine solche Fülle neuer, tiefer, abstrakter Probleme mit den mannigfachsten mathematischen Methoden behandelt und erledigt werden, heute zum 5. Male aufgelegt wird. Das ist in der Tat bemerkenswert. Als analog ist vielleicht der Erfolg zu betrachten, den der 1822 zuerst erschienene „Traité des propriétés projectives" von *Poncelet* hatte, durch den die projektive Geometrie begründet wurde.

Betrachten wir die Probleme und ihre Geschichte: die Auffindung der mathematischen Methode ist für die Geschichte des menschlichen Geistes von hoher Bedeutung. Dieser Fortschritt ist nicht, wie andere, ebenso wichtige, in dunkler Vorzeit getan, sondern er ist dem in hellem Licht sich entfaltenden griechischen Denken gelungen. In der Zeit der Naturphilosophen begonnen, ist er im 3. Jahrhundert vor Christi, zur Zeit von *Euklid* und *Archimedes*, vollendet. Durch die mathematische Methode ist man befähigt, aus als richtig angenommenen Sätzen mit absoluter Sicherheit neue Sätze abzuleiten. Es ist ja in der Tat erstaunlich, wie man aus den allereinfachsten Erfahrungen (Axiomen und Postu-

laten) die mannigfachsten, komplizierten und doch oft wieder so wunderbar einfachen Eigenschaften der geometrischen Figuren gewinnen kann. Durch alle Zeiten ist die „geometrische Weise" des Schließens bewundert worden, und vergeblich hat man oft versucht, sie auf andere Gebiete zu übertragen. Besonders klar und mit großer Freiheit gehandhabt, tritt sie bei *Archimedes* auf, wenn er z. B. bei der Bestimmung der Kugeloberfläche als Postulat die doch gar nicht ganz selbstverständliche Tatsache aufstellt: liegt die geschlossene konvexe Fläche F_1 ganz innerhalb der geschlossenen Fläche F_2, dann hat F_1 eine kleinere Oberfläche als F_2. Ich glaube, daß diese Freiheit in der Handhabung der Methode von manchen späteren Mathematikern bis in unsere Zeiten nicht verstanden worden ist. Ein ganz analoger Fall bei *Euklid* hat wohl den ersten Anstoß zur Beschäftigung mit einer zentralen Frage aus den Grundlagen der Geometrie gegeben, nämlich der Frage nach der *Unabhängigkeit der geometrischen Axiome oder Postulate* voneinander.

Euklid hat nämlich nicht gleich zu Beginn seines Werkes alle Axiome aufgestellt, vielmehr entwickelt er erst eine ganze Reihe von Sätzen, ehe er das berühmte Parallelenaxiom einführt. Dies wird von ihm so formuliert:

„Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite."

Diese Formulierung ist sehr merkwürdig und wohl teilweise deswegen so künstlich, weil *Euklid* vermeiden wollte, daß Teile des Axioms schon aus den früheren Axiomen folgen könnten, wie es z. B. sein würde bei der Formulierung: durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden gibt es eine und nur eine Gerade, die die erste nicht schneidet.

Andererseits war die Künstlichkeit des Axioms so in die Augen fallend, daß man schon im Altertum sich Gedanken machte, etwa so: ein so komplizierter Satz könne doch gar nicht wirklich Grundtatsache sein. Habe *Euklid* schon eine Menge von Sätzen ohne dies Axiom beweisen können, so sei es vielleicht möglich, das Parallelenaxiom selbst aus den übrigen Axiomen herzuleiten. So begannen die durch Jahrhunderte fortgesetzten Versuche, das Parallelenaxiom zu „beweisen". Diese Versuche führten ganz methodisch endlich im 19. Jahrhundert zur vollständigen Aufklärung: man hatte natürlich versucht, indirekt vorzugehen: wäre das Parallelenaxiom nicht gültig, so würden sich die und die merkwürdigen Folgerungen ergeben, z. B. die Winkelsumme im Dreieck könnte nicht zwei Rechte sein, es könnte kein Rechteck und kein Paar ähnlicher Dreiecke existieren usw. Endlich gelang es fast gleichzeitig (um 1830) *Lobatschefsky* und *Bolyai*, durch höchst kunstvolle Überlegungen die Trigonometrie (d. i. die analytischen Beziehungen zwischen den Größen der Seiten und Winkel in einem Dreieck) für den Fall der Nicht-Gültigkeit des Parallelenaxioms aufzustellen. Und da zeigte sich die wunderbare Tatsache: diese „Nicht-Euklidische" Trigonometrie ist in einfachster Weise verwandt mit der Trigonometrie auf der Kugel (der sphärischen Trigonometrie). Die Formeln der Nicht-Euklidischen Geometrie entstehen aus den sphärischen, indem man alle in den Formeln vorkommenden Seiten mit $i=\sqrt{-1}$ multipliziert, wobei die Formeln doch alle reell bleiben. (Die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln für die Ebene bleiben übrigens bei diesem Prozeß unverändert.) Damit aber war gezeigt: *der indirekte Beweis des Parallelenaxioms ist nicht zu führen.* Man kann zu keinem Widerspruch kommen, denn, wenn die Nicht-Euklidischen Formeln widerspruchsvoll wären, dann müßten auch die gewöhnlichen sphärischen Formeln zu einem Widerspruch führen. Also: *das Parallelenaxiom ist nicht aus den übrigen Axiomen zu beweisen.* Das war ein wirklich großer mathematischer Fortschritt. Der erste Unabhängigkeitsbeweis war geführt, und man kann sich gut vorstellen, daß der junge *Bolyai* in einen wahren Rausch versetzt wurde, als er nach Überwindung außerordentlicher Schwierigkeiten dies ungeahnte Ziel erreichte.

Lobatschefsky und *Bolyai* haben jedoch, indem sie den durch die geschichtliche Entwicklung gegebenen Weg gingen, noch viel mehr erreicht als bloß den Unabhängigkeitsbeweis; sie haben gezeigt, daß, wenn das Parallelenaxiom nicht gültig ist, notwendig die oben angedeutete Nicht-Euklidische Geometrie gilt, sie haben *alle* Nicht-Euklidischen Geometrien aufgestellt. Den Unabhängigkeitsbeweis für sich konnte man später viel einfacher führen, indem sich die schönsten Realisationen der Nicht-Euklidischen Geometrie ergaben: zunächst zeigte sich, daß, wie die sphärische Trigonometrie auf der Kugel, so die Nicht-Euklidische (pseudo-sphärische) Trigonometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung gilt, deren einfachstes Beispiel die durch Rotation der Tractrix um ihre Achse entstehende Fläche (Pseudosphäre) ist. (Die Geraden sind durch die geodätischen Linien zu repräsentieren) (*Beltrami*). Noch eleganter: die ganze dreidimensionale Nicht-Euklidische Geometrie wird so dargestellt: Punkte: alle Punkte im Innern einer Kugel; Geraden: alle Geraden, die die Kugelfläche schneiden; Bewegungen: alle in den Koordinaten lineare Transformationen, die das Innere der Kugel in sich überführen (*Cayley, Klein*). Diesem Resultat ging die bedeutungsvolle Entdeckung von *Laguerre* voraus, daß die Metrik der Euklidischen Geometrie beherrscht wird durch besonders charakterisierte lineare (projektive) Transformationen.

Dieser Unabhängigkeitsbeweis zeigt ganz evident die Stellung der Nicht-Euklidischen Geometrie, aber ganz in Ordnung war der Beweis

doch noch nicht. Zwar das Bedenken von *Bolyai*, ob nicht durch räumliche Betrachtungen sich noch ein Widerspruch ergeben könnte, war durch die Cayley-Kleinsche Darstellung erledigt, aber bedenklich bleibt: sind auch alle Axiome, die *Euklid* außer dem Parallelenaxiom braucht, ausdrücklich in dem Euklidischen Werke oder in späteren Darstellungen aufgeführt, oder brauchen *Euklid* und seine Nachfolger vielleicht stillschweigend Axiome, die zwar in der „wirklichen" Geometrie erfüllt sind, in der Nicht-Euklidischen nicht?

In der Tat waren schon Bedenken über die Vollständigkeit des Axiomsystems aufgetaucht. Die immer wieder verbesserten Ausgaben von *Legendres* Geometrie, Bemerkungen von *Gauß* über die Notwendigkeit von Anordnungspostulaten, die vielen Bemühungen des Vaters *Bolyai* um einen einwandfreien Aufbau der Inhaltslehre sind dafür Beispiele. Dann kam von anderer Seite starke Einwirkung: Die seit dem Wiederaufleben der Mathematik sich immer stärker emporhebende Analysis brauchte nach zwei Jahrhunderten außerordentlicher Entwicklung eine solidere Fundamentierung. Seit der Wende des 19. Jahrhunderts wurde die Grundlage der Zahlen- und Funktionenlehre immer tiefer eindringend untersucht, bis endlich das Wesen der stetig ausgedehnten Größen genügend geklärt war. Ein Teil der Euklidischen Grundsätze bezieht sich aber auf die für Größen geltenden Gesetze und diese werden dadurch zu geometrischen, daß geometrische Dinge, wie Strecken, Winkel, Flächenstücke (meistens stillschweigend) als Größen angesehen werden. So lieferte die arithmetische Untersuchung den ersten wichtigen Beitrag zu dem neuen festen Bau der geometrischen Axiome, der von *Pasch* (1882) durch Ausfüllung zweier erheblicher Lücken in dem Euklidischen System vollendet wurde: Wenn auch *Euklid* durch seine Größengrundsätze die Anordnung der Strecken auf einer Geraden vollständig beherrscht, so ist doch durch jene Grundsätze über die Anordnung der Figuren in der Ebene naturgemäß gar nichts ausgesagt. Hier ergänzt *Pasch* das alte System durch das mit Recht seinen Namen tragende Axiom: „jede Gerade, die mit einer Dreiecksseite einen Punkt gemeinsam hat, hat noch mit einer anderen Dreiecksseite einen Punkt gemeinsam." Eine andere wesentliche Lücke bei *Euklid* besteht darin, daß er stillschweigend beim Beweis der Kongruenzsätze die Beweglichkeit der Figuren voraussetzt, d. i. die Möglichkeit, etwa ein Dreieck mit ungeänderten Seiten und Winkeln an eine andere Stelle der Ebene zu verlegen. Diese Voraussetzung ist als Postulat gewiß schon seit *Riemann* empfunden worden, aber erstaunlicherweise in keiner Grundlegung der elementaren Geometrie zu finden. Erst *Pasch* hat die Beweglichkeit der Figuren durch Postulate formuliert und auf diese Weise wohl als erster ein vollständiges Axiomsystem aufgebaut.

Jetzt erst war der Weg zu exakten Unabhängigkeitsbeweisen frei. Da man ein vollständiges Axiomsystem hatte, so konnte man sich bei den Schlüssen ganz loslösen von geometrischer Einkleidung: Punkte, Ebenen, Anordnung, Bewegungen werden von dem spekulierenden Mathematiker allein als System von Dingen und Beziehungen zwischen diesen Dingen aufgefaßt, die eben jenen Gesetzen genügen. *Dies ist die mit vollständiger Klarheit und Konsequenz behauptete Plattform des Hilbertschen Werkes.* Hier sind die mannigfaltigsten Unabhängigkeitsbeweise durchgeführt, jeder eigentümlich durch die Stellung in dem Gesamtgebäude der Geometrie und durch die Besonderheit der angewandten mathematischen Hilfsmittel. Eng verbunden mit diesen Unabhängigkeitsbeweisen sind natürlich Abhängigkeitsbeweise, d. i. Nachweise, daß bestimmte Axiomgruppen für den Aufbau gewisser Teile der Geometrie genügen.

Durch alles dies wird das philosophische Bedürfnis nach Aufdeckung der Wege, die der menschliche Geist bis zur Erkenntnis der einfachen Eigenschaften des Raumes zurücklegen muß, wenig befriedigt. Außer dem Kantischen Motto findet sich in *Hilberts* Buch nichts, was direkt mit philosophischen Dingen zu tun hat. Es ist ausschließlich reinste Mathematik, in gewissem Gegensatz etwa zu *Euklid* und *Pasch*, die daneben der Verwurzelung der geometrischen Axiome in der Außenwelt ein Stück weit nachgehen. — Der Gegensatz von Mathematik und Philosophie tritt auch hier stark hervor: das mathematische Schaffen ist im stärksten Maße aktiv, aufbauend, fast unzerstörbar aufbauend; den Philosophen führt tiefst empfundenes Bedürfnis nach geordnetem Erkennen und Begreifen in lastender Arbeit doch immer nur zu umfassenderer Betrachtung — das Erreichen des Zieles bleibt stets ein trügerischer Traum. Den Mathematiker aber schützt vor jeder Überhebung die Gewißheit, daß alles von ihm Geschaffene von einem höheren Standpunkte, als wir ihn heute haben, selbstverständlich ist. Schon manches Gewirr von Sätzen, die in mühevoller Arbeit aufgedeckt wurden, erscheint vom höheren mathematischen Standpunkt als beinahe selbstverständliche Folge aus wenigen einfachen Tatsachen. (Man vergleiche z. B. die Kegelschnittlehre im Altertum und die moderne mit den Methoden der projektiven Geometrie entwickelte.) Dieses Schicksal des Selbstverständlichwerdens würde auf einer höheren Entwicklungsstufe die ganze Mathematik treffen.

Ich will nun versuchen, die wichtigsten Resultate *Hilberts* darzustellen:

I. Grundlagen der projektiven Geometrie. Im Anfang des 19. Jahrhunderts wurde durch *Poncelet* die projektive Geometrie (d. i. die Lehre von den durch Projektion sich nicht verändernden Eigenschaften der geometrischen Gebilde)

systematisch begründet und entwickelt. An diese große Darstellung knüpften sich sehr bald Überlegungen über die axiomatischen Grundlagen. Eine Menge typisch projektiver Sätze, z. B. der Satz über das vollständige Vierseit, der *Desarguessche* Satz über die perspektiven Dreiecke [gehen AA', BB', CC' durch einen Punkt, dann schneiden sich AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ auf einer Geraden, s. Fig. 1] lassen sich auf Grund der elementaren projektiven Axiome der Verknüpfung und Anordnung (in Zukunft mit L bezeichnet) ableiten. Doch gelang es nicht, andere für die weitere Entwicklung sehr wichtige Sätze zu beweisen, z. B. den sogenannten Pascalschen Satz. [Liegen A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 je auf einer Geraden, dann schneiden sich A_1B_2 und A_2B_1, A_2B_3 und A_3B_2, A_3B_1 und A_1B_1 auf einer Geraden, s. Fig. 2.] Die Ableitung

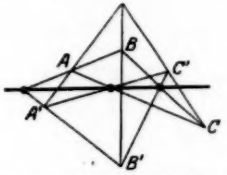

Fig. 1. Desarguesscher Satz.

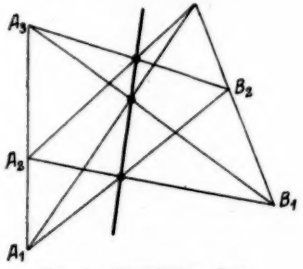

Fig. 2. Pascalscher Satz.

dieses Satzes gelang zunächst nur, wenn man noch irgendein Stetigkeitspostulat hinzunahm (*v. Staudt, Darboux* u. a.). Es entstehen die Fragen:

1. Ist die Ableitung der projektiven Geometrie nur mit Hilfe der L-Postulate möglich?

Wenn 1 zu verneinen:

2. Welche projektiven Sätze folgen allein aus den L-Postulaten?

3. Ist es möglich, ohne Stetigkeit, aber mit Benutzung der Kongruenzpostulate die projektive Geometrie aufzubauen?

Diese Fragen wurden zunächst durch einen Vortrag von *Wiener* (1891) dadurch vereinfacht, daß er den Satz aufstellte: Alle Sätze der ebenen projektiven Geometrie lassen sich mit Hilfe der elementaren ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung (in Zukunft mit L_2 bezeichnet) beweisen, wenn der Desarguessche und Pascalsche Satz als gültig vorausgesetzt werden. Da der Desarguessche Satz aus der Gesamtheit der L-Axiome folgt, so konzentrierte sich das Interesse auf den Beweis des Pascalschen Satzes.

Im Jahre 1898 hat *F. Schur* den Pascalschen Satz mit Hilfe der üblichen Kongruenzaxiome, *ohne* Hilfe eines Stetigkeits- (sowie des Parallelen-) Axioms abgeleitet. Damit war zum erstenmal die elementare Euklidische Geometrie ohne Stetigkeit begründet, denn dazu ist eine von der Stetigkeit unabhängige Proportionslehre nötig, die zu entwickeln schon lange das Ziel nachdenklicher Geometer war, z. B. *G. Saccheris* (ca. 1700), der die Euklidische Proportionslehre genau so wie die Einführung des Parallelaxioms als „schimpflichen Fleck auf dem herrlichen Körper der Euklidischen Geometrie" empfunden hat. Aus den allgemeinen Entwicklungen der projektiven Geometrie ergibt sich nun die Proportionslehre durch einfache Spezialisierung.

Die dritte der Fragen über die Grundlagen der projektiven Geometrie war damit positiv beantwortet. *Hilbert* hat nun die beiden andern vollständig erledigt und das hellste Licht über die vielfachen Beziehungen der Sätze von *Desargues* und *Pascal* (von jetzt an mit *Des* und *Pas* bezeichnet) und den verschiedenen Postulaten verbreitet.

Die Resultate lasen sich etwa so darstellen:

1. *Des*, der eine leichte Folge aus L ist, kann aus L_2 (den ebenen L-Postulaten) *nicht* bewiesen werden, selbst wenn man Stetigkeitsaxiome mitbenutzt.

2. Unter Benutzung von *Des* kann man mit L_2 die Ebene analytisch machen, d. i. den Punkten Paare von Zahlen (Koordinaten) zuordnen, Addition und Multiplikation dieser Zahlen durch geometrische Operationen erklären, wobei die gesamten Rechnungsgesetze mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation sich als gültig erweisen. Die Koordinaten der Punkte einer Geraden befriedigen bestimmte lineare Gleichungen. Eine solche zweidimensionale analytische Geometrie kann man leicht zu einer dreidimensionalen erweitern, die Gebilde des Raumes werden dabei dargestellt durch geeignete Gebilde der Ebene, genau so wie es bei der gewöhnlichen „darstellenden Geometrie" der Fall ist. Es erweist sich also *Des* als vollständig äquivalent mit der Tatsache, daß die ebene Geometrie in die räumliche eingebettet werden kann. Man kann etwa symbolisch schreiben:

$$Des = L - L_2$$

Wir nehmen das Resultat von 3 voraus, nach dem in einem solchen, mit Hilfe von *Des* geschaffenen Zahlensystem nicht notwendigerweise die Kommutativität der Multiplikation gilt und kommen dadurch zu der Beantwortung der Frage 2: Was folgt aus L allein? Jeder Satz in unserer Geometrie ist durch die Koordinateneinführung zu einem analytischen Satz, zu einer „Formel" geworden. In der allgemeinen, auf

L gegründeten Geometrie gelten alle diejenigen Sätze, deren analytisches Äquivalent Formeln sind, die ohne Anwendung der Kommutativität der Multiplikation gelten. Z. B die Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

entspricht einem Satz, der in jeder L-Geometrie gilt, dagegen *nicht* die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3. Da mit Hilfe der Stetigkeit aus L Pas und damit die ganze projektive Geometrie abgeleitet werden kann, müssen wir uns, um Geometrien zu finden, in denen trotz L die projektive Geometrie nicht gilt, mit unstetigen, sogenannten *Nicht-Archimedischen* Geometrien beschäftigen. [Bei *Archimedes* lautet das Stetigkeitspostulat: Es gibt stets Vielfache von a, die größer als eine vorgegebene Größe b sind.] Solche Nicht-Archimedischen Geometrien hat zuerst *Veronese* (1891) untersucht und dabei etwa denselben Weg eingeschlagen wie *Bolyai* und *Lobatschefsky*. Er hat nämlich versucht, ganz allgemeine Geometrien aufzubauen, in denen es „aktual" unendlich große und deswegen auch aktual unendlich kleine Strecken gibt. Hierbei war aber die Widerspruchslosigkeit der auftretenden geometrischen Phänomene nicht klar zu erkennen. *Hilbert* konstruiert nun zunächst eine ganz spezielle Nicht-Archimedische Geometrie, der er Zahlen zugrunde legt, die sich nach Potenzen eines Parameters t entwickeln lassen und deren Anordnung durch den Koeffizienten der niedrigsten Potenz von t entschieden wird. Aus Tripeln solcher Zahlen ist es nicht schwer, eine zweifellos widerspruchsfreie Geometrie aufzubauen, in der von allen Postulaten allein das Archimedische Postulat nicht gilt.

Ein weiterer Schritt ist nun der Aufbau eines Nicht-Archimedischen Zahlensystems, in dem das Gesetz der Kommutativität der Multiplikation nicht gültig ist. Dazu benutzt *Hilbert* Zahlen, die sich nach Potenzen zweier Parameter s und t entwickeln lassen. Bei ihrer Multiplikation ist die Beziehung

$$t\,s = 2\,s\,t$$

anzuwenden. Durch diese Festsetzung ist das Produkt zweier Zahlen stets wieder als Summe von Gliedern der Form $a\,t^m\,s^n$ darstellbar. Die Anordnung wird entschieden durch den Koeffizienten desjenigen Gliedes unter den Gliedern mit kleinstem n, für das m den kleinsten Wert hat. Mit Hilfe dieses „nicht kommutativen" Zahlensystems ist es nicht schwer, eine Geometrie aufzubauen, in der Pas nicht gilt, also auch nicht die ganze projektive Geometrie.

Die mannigfachen Beziehungen, die damit zwischen grundlegenden Sätzen der Geometrie aufgedeckt sind, macht vielleicht folgende Übersicht klarer [hierbei sind folgende Bezeichnungen gebraucht: A: Archimedisches Postulat; B: Postulate der Bewegungen; P: Projektive Geometrie; $K.\,M.$: Gesetz der Kommutativität der Multiplikation; $>$: hat zur Folge; $\not>$: hat nicht zur Folge]:

Desarguesscher Satz und Lageaxiome.

$L >$ Des (*Desargues, Poncelet*)

$L_2 +$ Des $> L$, $L_2 \not>$ Des (*Hilbert*)

Projektive Geometrie.

$L + A > P$ (*v. Staudt*)

$L + B > P$ (*Schur*)

$L \not> P$ (*Hilbert*)

Pas + Des + $L_2 > P$ (*Wiener*)

Pas + $L_2 > P$ (*Hessenberg*)

Arithmetisierung.

Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen (*Descartes*)

$L + A >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl Zahlen. (*v. Staudt*)

$L + B >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen (*Schur*)

$L \not>$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen

$L >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System von Zahlen ohne $K.\,M.$ ..... } (*Hilbert*)

II. Lehre vom Polygoninhalt. Die Lehre vom Inhalt hat dadurch einen besonderen Reiz, daß sie an der Grenze der elementaren Geometrie steht. Der Inhalt schon so einfacher Figuren wie des Kreises etwa oder von Pyramiden erfordert zu seiner Bestimmung unendliche Prozesse (die auf Integration herauslaufen). Diese Probleme haben die feinsten Infinitesimalbetrachtungen der Antike, hauptsächlich von *Euklid* und *Archimedes* veranlaßt.

Es ist als eine merkwürdige Einzelerscheinung anzusehen, daß die Lehre vom Inhalt ebener Polygone ohne infinitesimale Betrachtungen möglich ist. Das hat schon im wesentlichen *Euklid* durchgeführt. Aber er benutzt hierbei das Postulat, daß der Inhalt Größeneigenschaft hat, was für Polygone aus den übrigen Axiomen (ohne Stetigkeitspostulat) bewiesen werden kann. Die Frage ist von vielen Mathematikern im 19. Jahrhundert behandelt, aber erst *Hilbert* hat sie vollständig zum Abschluß gebracht durch folgende Betrachtungen: 1. Man kann für ein Polygon (durch Zerlegung in Dreiecke) ein Inhaltmaß einführen und zeigen, daß die Summe der Inhaltmaße der Teile unabhängig von der Zerlegung ist. (Zu diesem Nachweis muß man die Proportionalsätze benutzen.) Daraus folgt sofort, daß man ein Polygon Π_1 nicht so zerlegen kann, daß man aus seinen Teilen ein Π_1 umschließendes Polygon Π_2 zusammensetzen kann [„das Ganze ist größer als sein Teil"]. Dieser Satz ist häufig als Postulat aufgestellt worden.

2. Umgekehrt: Haben Π_1 und Π_2 gleich s Inhaltmaß, dann kann man zu Π_1 und Π_2 beziehungsweise kongruente Dreiecke $\triangle_1'$, $\triangle_2'$ . . . resp. $\triangle_1''$, $\triangle_2''$ . . . hinzufügen, so daß die Gesamtheiten (Π_1, $\triangle_1'$, $\triangle_2'$ . . .) und (Π_2, $\triangle_1''$, $\triangle_2''$ . . .)

in paarweise kongruente Stücke zerlegt werden können. (Der Nachweis folgt unmittelbar aus *Euklids* „Verwandlung" des Dreiecks in ein Rechteck.) Π_1 und Π_2 sind aber als inhaltsgleich zu bezeichnen, denn sie sind je als Differenz *zweier* aus beziehungsweise kongruenten Teilen zusammengesetzter Polygone darstellbar.

III. Begründung der Geometrie mit Zugrundelegung der Gruppeneigenschaft der Bewegung[1]). Gibt man einmal als anschaulich begründet zu, daß die Punkte der Ebene durch eine zweifache Zahlenmannigfaltigkeit dargestellt werden können, wobei unendlich benachbarten Punkten Paare von unendlich wenig verschiedenen Koordinaten entsprechen, dann ist die gruppentheoretische Begründung der Geometrie sehr naheliegend und führt zu außerordentlich einfachen Resultaten. Sie ist besonders von *S. Lie* ausführlich behandelt worden. Während aber *Lie* von der Gruppe der Bewegungen eine Menge Eigenschaften voraussetzt (z. B. Differenzierbarkeit der sie darstellenden Funktionen, Parameteranzahl usw.), die mit der Anschauung wenig Verbindung haben, ist es *Hilbert* durch eine schwierige Untersuchung gelungen, folgende einfachen Eigenschaften als genügend zur Charakterisierung der (Euklidischen und Nichteuklidischen) ebenen Bewegungen nachzuweisen: Die Bewegungen sind stetige, ein-eindeutige Transformationen der Ebene, die den Umlaufssinn der Kurven nicht ändern, sie bilden eine „abgeschlossene" Gruppe, und es gibt unendlich viele Bewegungen, die einen Punkt ungeändert lassen.

[Die Eigenschaft „abgeschlossen" soll bedeuten: Die Grenze einer konvergenten Folge von Bewegungen ist wieder eine Bewegung, oder ausführlich: „Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Tripel ABC genau in $A'B'C'$ übergeht."]

Es wird also nicht nur nicht etwa die Differenzierbarkeit der die Bewegung darstellenden Funktionen vorausgesetzt, sondern nicht einmal gefordert, daß die Bewegungsgruppe transitiv ist, d. i., daß jeder Punkt in jeden andern durch eine Bewegung übergeführt werden kann, oder daß eine Bewegung, die zwei Punkte ungeändert läßt, alle Punkte ungeändert läßt. Es ist wirklich erstaunlich und, wie mir scheint, ganz abgesehen von der Fragestellung in den Grundlagen der Geometrie, von großem Interesse für die Theorie der stetigen Transformationen, daß diese bescheidenen Voraussetzungen bereits die ebenen Bewegungen unter den allgemeinen ebenen Transformationen charakterisieren. Es ist klar, daß dies Resultat dazu anregt, auch andere Transformationsgruppen durch solche allgemeine, von der Darstellung unabhängige Eigenschaften zu charakterisieren. Hierbei muß man, ebenso wie *Hilbert*, den ausgiebigsten Gebrauch machen von den Methoden der modernen Theorie der stetigen Funktionen.

IV. Eine sehr merkwürdige Untersuchung macht *Hilbert* über die Stellung der Spiegelungen gegenüber den eigentlichen Bewegungen der Ebene in sich. Es zeigt sich:

1. Unter Voraussetzung der Stetigkeit folgt aus der Existenz der eigentlichen ebenen Bewegungen die Euklidische Geometrie, insbesondere also auch die Möglichkeit der Spiegelung.

2. Es gibt aber *unstetige* ebene Geometrien, in denen zwar die eigentlichen Bewegungen der Ebene, aber keine Spiegelungen möglich sind. Diese Geometrie wird wieder durch ein besonderes Nicht-Archimedisches (und Nicht-Pascalsches) Zahlensystem konstruiert.

Es eröffnet sich hier der Blick auf ein sehr weites, noch vollständig unerforschtes Gebiet: systematische Untersuchung der allgemeinen Zahlensysteme, in denen die Multiplikation nicht kommutativ ist. Es hat den Anschein, als wenn dieses Gebiet, das eine höhere Stufe der Gruppentheorie darstellt, reich ist sowohl an allgemeinen Gesetzen, wie an besonderen Einzelerscheinungen.

Im vorstehenden haben wir versucht, die wichtigsten Forschungen, die *Hilbert* in den Grundlagen der Geometrie ausgeführt hat, darzustellen. Aber neben all dem Neuen, was sich uns hier darbietet und leicht noch wesentlich hätte vermehrt werden können, gibt es etwas, wovon man durch eine Übersicht keinen Begriff geben kann, das ist die Form der Hilbertschen Darstellung. Und sicher ist die glänzende Formung wissenschaftlicher Ideen eine Leistung, so wertvoll wie die der ersten Auffindung und von stärkstem Einfluß auf die geschichtliche Entwicklung. Die Werke von *Bolyai* und *Lobatschefsky*, sowie von *Pasch* mit ihrem unschätzbaren mathematischen Inhalt haben auf die breite Masse der Interessenten nur wenig Eindruck gemacht. Aber der *Hilbert* eigentümliche Geist, der gerade in den geometrischen Arbeiten so stark spürbar ist, logische Kraft verbunden mit starkem Temperament, übliche Formen mißachtend, unhistorisch, das Wesentliche mit gleichsam Kantischem Vergnügen an Antithese formend und mit nie trügender Sicherheit höchst wirkend darstellend, die Freiheit des mathematischen Denkens radikal ausnutzend, das hat dem geometrischen Werk von *Hilbert* erst den großen Einfluß auf die Mathematiker unserer Generation gegeben, hat eine Umwälzung in ihrem Denken herbeigeführt, die mit den großen Umwälzungen in der Geschichte der Mathematik wohl verglichen werden kann.

[1]) Eine Menge von verknüpfbaren Operationen heißt eine Gruppe, wenn diese Verknüpfung alle Gesetze etwa der gewöhnlichen Multiplikation befriedigt, außer der Vertauschbarkeit der Faktoren.

Hilbert als Analytiker.

Von R. Courant, Göttingen.

Die Bedeutung wissenschaftlicher Leistungen liegt oft nicht allein in dem Material an neuen Tatsachen, welches zu dem schon vorhandenen hinzugefügt wird; nicht minder wichtig für die Entwicklung der Wissenschaft kann eine Einsicht sein, wenn sie Ordnung, Einfachheit und Klarheit in ein vorhandenes aber schwer zugängliches Gebiet bringt und so die Übersicht, Erfassung und Beherrschung der Wissenschaft als einer Einheit erleichtert oder überhaupt erst ermöglicht.

Man darf bei den Hilbertschen Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Analysis auch diesen Gesichtspunkt nicht vergessen, wenn man ihrer Bedeutung nach allen Seiten hin gerecht werden will. *Hilberts* Untersuchungen über Variationsrechnung und das Dirichletsche Prinzip sowie die Arbeiten über die Theorie der Integralgleichungen zeigen alle das bewußte Bestreben, an der Lösung neuer Probleme Methoden zu finden, welche das ehedem Schwere leicht machen, neue Zusammenhänge in vorhandenen Materien erschließen und den sich verästelnden Fluß von Einzeluntersuchungen in ein gemeinsames Bett zurückleiten.

Schon in den Anfangsstadien der modernen mathematischen Entwickelung haben Fragen der Variationsrechnung die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen. Die Natur selbst drängte zum Ausbau dieses Wissenszweiges. Frühzeitig bemerkte man, daß irgendwie bei den Gesetzen der Physik stets ein Minimumprinzip zu walten scheint. Ein Lichtstrahl läuft in einem unhomogenen Medium so, daß er in einem möglichst kleinen Zeitabschnitt von einem seiner Punkte zu einem späteren gelangt; diese Tatsache ist der einfachste Ausdruck des Brechungsgesetzes. Eine Membran aus Seifenlösung spannt sich unter der Wirkung der Kapillarität in den Rahmen einer gegebenen geschlossenen Raumkurve so ein, daß sie einen möglichst kleinen Flächeninhalt einnimmt; ein elektrischer Strom durchfließt bei gegebenen Spannungsverhältnissen an der Oberfläche einen leitenden Körper derart, daß dabei die entwickelte Wärmemenge ein Minimum wird. Man lernte bald, daß sich durch ähnliche Minimalforderungen die allgemeinsten Gesetze der Mechanik, ja der Physik überhaupt, auf die kürzeste und prägnanteste Form ausdrücken lassen. Unbeschadet der naturphilosophischen Frage, ob wir in diesem Faktum mehr zu sehen haben als eine sonderbare dankbar hinzunehmende Möglichkeit, verwickeltere Gesetze einfach und handlich zusammenzufassen, oder ob diese Minimalprinzipien der Physik uns auf tiefere Zusammenhänge hinweisen — der mathematischen Analysis als der Wissenschaft von den mathematischen Formen des Naturgeschehens erwächst daraus die Aufgabe, Minimumprobleme der geschilderten Art systematisch zu untersuchen; und diese Fragestellung bedeutet den Ausgangspunkt der Variationsrechnung. Es handelt sich dabei nicht um solche Maximum- oder Minimumprobleme, wie sie ursprünglich mit den Anstoß zur Ausbildung der Differentialrechnung gegeben haben und wie sie heute vielfach in den Schulunterricht übergegangen sind. Bei diesen elementaren Minimumsaufgaben soll, anschaulich gesprochen, auf einer gegebenen Kurve oder Fläche ein höchster oder tiefster Punkt gefunden werden. (Der Mathematiker darf dabei vor einem „Raum mit vier und mehr Dimensionen“ und darin liegenden Gebilden nicht zurückscheuen.) In der Variationsrechnung dagegen wird nicht ein einzelner Punkt auf einer Kurve oder Fläche gesucht, sondern der Gesamtverlauf einer solchen Kurve oder Fläche ist das unbekannte, aufzusuchende Objekt. So z. B., wenn auf einer gegebenen Fläche, etwa dem Erdellipsoid, zwischen zwei Punkten die kürzeste (geodätische) Verbindunglinie gezogen oder in eine geschlossene Raumkurve die Lamelle kleinsten Flächeninhaltes eingespannt werden soll. Wie die elementaren Minimumprobleme direkt auf den Prozeß der Differentiation hinführen, so erhält man aus den Variationsaufgaben Differentialgleichungen, und es ist daher kein Wunder, wenn die wichtigsten Theorien über die Differentialgleichungen, soweit sie in der Physik von Bedeutung sind, eng mit der Variationsrechnung zusammenhängen. Trotzdem hiernach die Variationsrechnung eine so zentrale Stellung innerhalb der mathematischen Analysis einzunehmen berufen scheint, trotzdem fast alle großen Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts an ihrem Aufbau mitgewirkt haben und noch in der vorigen Generation durch die Untersuchungen von *Weierstraß* neue bedeutende Fortschritte erzielt und mannigfache Anregungen hinausgetragen wurden, ist diese Disziplin bis in die jüngste Zeit hinein in den Augen vieler Fachgenossen und noch zahlreicherer Physiker nur ein Spezialgebiet, und nicht einmal ein besonders zugängliches, gewesen. Wenn diese Auffassung sich in den letzten Jahrzehnten gründlich geändert hat, wenn allmählich die überall klärend und vereinfachend wirkenden Gesichtspunkte der Variationsrechnung Gemeingut der mathematischen Kreise geworden sind, so ist das nicht zuletzt dem Impuls zu danken, welcher von den Hilbertschen hierhergehörigen Arbeiten und seinen persönlichen Anregungen ausgeht. Mag er nun für alte Theoreme neue strenge und durchsichtige Beweise geben, oder wie im Falle der — heute im Anschluß an die Quantentheorie auch bei den Physikern so aktuellen

— Hamilton-Jacobischen Theorie schlagende Formulierungen finden, welche die vielfachen scheinbar vereinzelt und zusammenhanglos nebeneinanderstehenden Tatsachen mit einem Griff zusammenfassen und in ein gemeinsames Licht stellen, so daß nunmehr der Weg für weitgehende Verallgemeinerungen frei wird, oder mag er schließlich, wie in den Arbeiten über das absolute Minimum der wissenschaftlichen Fragestellung eine ganz neuartige und höchst fruchtbare Wendung geben — stets ist mit dem Ergebnis der Arbeit zugleich etwas für die Einfachheit und Einheit der mathematischen Wissenschaft überhaupt gewonnen. Unter allen hierhergehörigen Hilbertschen Abhandlungen hat wohl die über das „Dirichletsche Prinzip" den größten Einfluß ausgeübt und ist für die Hilbertsche Denkart am meisten charakteristisch.

Um diese Leistung dem Verständnis näher zu bringen, ist es nötig, mit einigen Worten auf den Entwicklungsgang unserer Wissenschaft in der neueren Zeit einzugehen. Mit der Ausbildung der Differential- und Integralrechnung im 17. Jahrhundert setzte eine glänzende Epoche mathematischen Lebens ein; in raschem Fluß bis tief hinein ins 19. Jahrhundert folgten sich die wichtigsten Entdeckungen; ein gigantischer, fast unübersehbarer Wissensstoff türmte sich zu einem Gebirge, das auch heute noch keineswegs eingeebnet ist. Aber bei dieser stürmischen Entwicklung gingen die Maßstäbe mathematischer Strenge und Klarheit vielfach verloren, welche von den Griechen überkommen waren. Die „höhere Mathematik" wurde wirklich eine Art Geheimwissenschaft, wo man sich auf einen guten wissenschaftlichen Instinkt ebenso verlassen mußte wie auf klar präzisierbare Einsicht, wenn man bei der Handhabung der neuen Methoden nicht vom richtigen Wege abirren wollte. „Allez en avant, et la foi vous viendra", dieses Motto ist recht bezeichnend für den unkritischen Geist dieser, wie eine Naturkraft hervorbrechenden, mathematischen Produktivität. Die Reaktion in Gestalt kritischer Selbstbesinnung konnte nicht ausbleiben; ein großer Teil der mathematischen Arbeit im 19. Jahrhundert ist der Aufgabe gewidmet, für das früher Geschaffene die tragfähigen Fundamente zu finden und die Mathematik wieder zu derselben Höhe von Strenge und Sicherheit zu führen, die sie im Altertum erreicht hatte. Eine der ersten charakteristischen Leistungen in dieser Hinsicht war die Doktordissertation von *Carl Friedrich Gauß*, dem princeps mathematicorum, wie man später mit vollem Recht diesen gewaltigen Geist genannt hat. In dieser Arbeit wird zum ersten Male in bewußter strenger Form ein Existenzbeweis geführt, und zwar der Beweis des Satzes, daß jede algebraische Gleichung $n$ten Grades auch wirklich n Wurzeln besitzt. Während man sich früher einfach naiv das Problem stellte, „die" Wurzeln einer Gleichung zu finden, wird hier sachgemäß die Vorfrage aufgeworfen und in positivem Sinne entschieden, ob überhaupt eine Lösung des Problemes notwendig existieren muß. Von da ab sind zahlreiche mathematische Untersuchungen solchen Existenzbeweisen gewidmet; das geheimnisvolle Wörtchen „es gibt" spielt in der Mathematik des 19. Jahrhunderts eine große Rolle (eine Rolle übrigens, welche ihrerseits auch wieder neue kritische Betrachtungen herausgefordert hat). Das mathematische Bedürfnis, solche Existenzbeweise für die Lösungen zu finden, dehnt sich auch auf solche Probleme aus, welche aus der Physik oder Mechanik entspringen.

Hier ist es nötig, etwas über die Einwendungen zu sagen, welche von physikalischer Seite gelegentlich gegen die mathematischen Existenzbeweise als etwas Überflüssiges und Wertloses erhoben worden sind; unter bestimmten physikalischen Bedingungen — so argumentiert man — muß ein physikalischer Vorgang in ganz bestimmter Weise ablaufen, und daher müssen die entsprechenden mathematischen Probleme, mögen sie sich auf Differentialgleichungen beziehen oder sonstwie geartet sein, notwendig eine bestimmte Lösung besitzen, für die einen darüber hinausgehenden mathematischen Existenzbeweis zu führen, mehr oder weniger Spitzfindigkeit sei. Dieses Argument scheint mir am Ziele völlig vorbei zu gehen. Abgesehen davon, daß mathematische Theorien ihre Wahrheit in sich tragen müssen und sie nicht aus den Gesetzen der physikalischen Natur entlehnen können, ist gerade die Führung des mathematischen Existenzbeweises auch von prinzipiellem Interesse für die Frage der mathematischen Darstellung physikalischer Phänomene; gewiß kann deren Existenz und Realität nicht durch mathematische Betrachtungen bewiesen werden (gegen eine solche Behauptung würde sich der Physiker mit Recht wenden), wohl aber bestätigt der mathematische Existenzbeweis, daß der mathematische Ansatz dem wirklichen realen Vorgang adäquat ist; und schließlich ist vom Standpunkt der Praxis noch zu sagen, daß in vielen Fällen der Existenzbeweis zugleich auch ein Mittel liefert, um die Lösung in praktisch brauchbarer Form wirklich herzustellen.

Wie dem auch sei, unter den mathematischen Existenzbeweisen, welche für die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert von Bedeutung sind, spielen gerade diejenigen eine hervorragende Rolle, die sich im Anschluß an physikalische Vorstellungen auf Betrachtungen der Variationsrechnung stützen. Insbesondere gilt dies für den grandiosen funktionentheoretischen Gedankenkreis, welcher um die Mitte des Jahrhunderts von *Bernhard Riemann*, dem unvergleichlich tiefsinnigen Forscher, geschaffen wurde. Der gewaltige Bau seiner Theorie der „Abelschen Funktionen" ruht auf solchen Existenzbeweisen, die mit Gedanken der Variationsrechnung arbeiten. Worum es sich dabei handelt, läßt sich im Anschluß an die physikalische Vorstellung etwa so verständlich machen: Man denke sich irgendeine Fläche im

Raume, möge sie nun das Aussehen einer Kugel oder eines Ellipsoides, oder z. B. einer diesen Flächen innerlich ganz wesensfremden Ringfläche oder noch kompliziertere Gestalt haben, möge sie geschlossen sein oder Ränder besitzen. Stellen wir uns nun diese Fläche mit einer elektrisch leitenden Schicht bedeckt vor und denken wir in zwei beliebigen ihrer Punkte den positiven und negativen Pol einer elektrischen Stromquelle eingesetzt, so wird gewiß, das sagt die physikalische Anschauung, ein ganz bestimmtes stationäres Strömungsbild auf der Fläche das Ergebnis sein, im einzelnen noch abhängig von der Natur der Fläche, ihrer Berandung, der Lage der Pole usw. Ganz analoge Probleme ergeben sich bei der Wärmeleitung, der Strömung von Flüssigkeiten usw. Mathematisch gesprochen handelt es sich dabei um gewisse, sogenannte Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen, und zwar gerade um solche Probleme, wie sie sich aus der Variationsrechnung ergeben; die entsprechenden Variationsprobleme verlangen nämlich in der Hauptsache, daß beim wirklichen Strömungsvorgang die entwickelte Joulesche Wärme geringer wird als bei anderen denkbaren Strömungen. Wenn man es als selbstverständlich hinnimmt, daß eine solche Minimumforderung durch geeignete Funktionen erfüllt werden kann, dann ist hiermit der Existenzbeweis für die Randwertaufgaben der Funktionentheorie ohne weiteres gegeben; *Riemann* verfuhr so und gab dieser Schlußweise den historisch gewordenen Namen „Dirichletsches Prinzip"; sein ganzes stolzes und im höchsten Sinne geniales Gebäude, vielleicht im 19. Jahrhundert die großartigste Schöpfung mathematischer Spekulation, ruhte auf der vermeintlichen Selbstverständlichkeit dieser Annahme.

Da kam die berühmte Kritik von *Weierstraß*, dem Manne, der wie kein anderer als Exponent des kritischen Geistes in der Mathematik des 19. Jahrhunderts gelten kann: *Weierstraß* wies darauf hin und zeigte an ganz einfachen Beispielen, daß ein Minimumproblem der Variationsrechnung überhaupt unter Umständen keine Lösung zu haben braucht, daß also auch für die Riemannschen Variationsprobleme die Existenz der Lösungen keineswegs eine Selbstverständlichkeit war, sondern eines Beweises bedurfte. Weit und breit in der mathematischen Rüstkammer war aber kein Mittel zu finden, das diesen fehlenden Existenzbeweis liefern konnte; das ganze stolze Riemannsche Gebäude stand plötzlich scheinbar ohne Fundament.

Ein solches fatales Beispiel eines sehr vernünftig anmutenden Variationsproblemes, welches keine Lösung besitzt, ist folgendes: Man soll zwei Punkte A, B durch eine möglichst kurze Kurve ohne Ecken verbinden, welche im Punkte A senkrecht auf der Geraden AB steht. Wie die Figur lehrt, kann man die Verbindungskurve so eng, wie man will, an die Gerade AB anschmiegen, ihre Länge so nahe, wie man will, an die Länge der Strecke AB heranbringen, und doch kann offenbar diese Länge nicht genau gleich der Länge AB der kürzesten, geraden, Verbindung sein, sondern muß immer etwas größer bleiben, weil die Bedingung des Senkrechtstehens in A verbietet, daß die Verbindungslinie ganz in die Gerade AB hineinfällt. Das Minimumproblem hat also keine Lösung. Denn es gibt unter den zugelassenen Wegen keinen kürzesten.

Die Folge der Weierstraßschen Kritik war, daß man ratlos und bedauernd den Riemannschen Gedankengängen den Rücken kehrte und erst auf außerordentlich mühsamen, ganz anderen Wegen allmählich so weit kam, die wichtigsten Teile der Riemannschen Resultate doch zu sichern, wobei allerdings die wunderbare Architektonik des Baues sehr gelitten hat. Nur wenige Mathematiker hegten die Hoffnung, daß vielleicht in späteren Zeiten einmal die Wiederbelebung der ursprünglichen Riemannschen Ideen gelingen würde. Aber wie, das blieb ein Rätsel.

Es gehörte die ganze Unbefangenheit und Freiheit von dem Druck der Tradition dazu, welche nur den wirklich großen Forschern eigen ist, um das scheinbar vollständig unzugängliche Problem der Rettung des Dirichletschen Prinzipes anzugreifen. *Hilbert* besaß den Mut, er versuchte es, und es glückte. Ganz neuartige, viel bewunderte Überlegungen von höchstem Scharfsinn mußten angewandt werden, und mühsam mußte der Leser der Hilbertschen Arbeit um das Verständnis ringen, aber das große entscheidende Ziel war erreicht: es war für die Analysis ein neues Hilfsmittel geschaffen, welches die Möglichkeit gab, aus dem Dirichletschen Prinzip eine wirkliche Beweismethode zu gestalten. Von diesen Hilbertschen Untersuchungen sind viele andere Forscher angeregt worden, und das Ergebnis aller dieser Bestrebungen ist, daß man heute die alten Riemannschen Schlußweisen bei völliger Strenge mit einer Einfachheit und Durchsichtigkeit handhaben kann, welche der inneren Einfachheit des zugrunde liegenden physikalischen Bildes entspricht.

Über die weiteren Fortschritte zu berichten, welche die Hilbertschen Ideen im Gebiete der Variationsrechnung mit sich brachten, dazu fehlt hier der Raum. Wir müssen noch einen Blick auf ein anderes Arbeitsgebiet der Analysis werfen, dem *Hilbert* ein gut Teil seiner Kraft gewidmet hat, die Theorie der Integralgleichungen.

Diese Theorie ist in ihrer jetzigen Form ein Kind des 20. Jahrhunderts. Der schwedische

Mathematiker *Ivar Fredholm* entdeckte mit scharfem Blick, daß gewisse wichtige Funktionalgleichungen, die zur Bestimmung von Funktionen bei Problemen der mathematischen Physik dienen, eine Form besitzen, welche eine starke Analogie mit viel elementareren mathematischen Aufgaben, nämlich den Aufgaben aus der Lehre von den linearen Gleichungen, zeigt; diese Funktionalgleichungen, deren Form nachträglich in nuce schon bei zahlreichen früheren Untersuchungen erkennbar wurde, erhielten später den Namen Integralgleichungen; *Fredholm* gab in seiner klassischen Arbeit eine sehr elegante Auflösungstheorie, und die neuen Ansätze fesselten bald das Interesse vieler Mathematiker. Aber man kann wohl sagen, daß erst durch das Eingreifen der Hilbertschen Untersuchungen die wahre Bedeutung der Integralgleichungstheorie herausgestellt worden ist; ihre mannigfachen Beziehungen zu den verschiedensten Gebieten der Mathematik, ihre vielseitige Anwendungsfähigkeit und die innere Harmonie und Einfachheit ihrer Struktur, ihre zusammenfassende Tendenz gegenüber zahlreichen Einzeluntersuchungen wurden den Fachgenossen erst richtig offenbar aus der Folge von großen Abhandlungen, welche *Hilbert* hintereinander seit dem Jahre 1904 veröffentlicht hat, und welche nun als Buch zusammengefaßt vorliegen. Wir wollen versuchen, die gedankliche Tendenz dieser Arbeiten etwas näher zu schildern und damit einen Einblick in die erstaunliche Mannigfaltigkeit des Inhaltes zu geben. Die erste Abhandlung enthält zunächst eine neue Ableitung der allgemeinen Fredholmschen Theorie, welche den einfachen Grundgedanken dieser Theorie bloßlegt; aber schon hier geht *Hilbert* einen entscheidenden Schritt weiter, indem er die tiefe innere Verwandtschaft des Integralgleichungsproblems mit dem elementaren Problem der Ablösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten konsequent verfolgt. Er erkennt die besonders wichtige Sonderstellung, welche vor allem eine bestimmte Klasse von Integralgleichungen, die sogenannten symmetrischen Integralgleichungen, einnimmt; ein symmetrisches lineares Gleichungssystem steht nämlich in engster Beziehung zur geometrischen Theorie der Flächen zweiter Ordnung (der Ellipsoide usw.), wobei man natürlich bei größerer Variabelnzahl in einen „Raum von mehr Dimensionen" hineinsteigen muß. Genau so, wie es nun bei diesen Flächen zweiter Ordnung Hauptachsen oder Fundamentalrichtungen gibt, erhält man bei den symmetrischen Integralgleichungen entsprechende Lösungsfunktionen, Fundamentallösungen oder Eigenfunktionen genannt, welche im allgemeinen in unendlicher Anzahl vorhanden sind und sofort einen Platz im Brennpunkt des Interesses einnehmen. Es zeigt sich nämlich, daß diese Theorie der Eigenfunktionen in unmittelbarem Zusammenhange steht mit der physikalischen Theorie der Eigenschwingungen. Jedes schwingungsfähige physikalische System vermag bekanntlich gewisse rein periodische Eigenschwingungen auszuführen, deren Anzahl je nach der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems endlich oder unendlich ist; so z. B. kann eine Saite die unendliche, als Grundton und Obertöne bekannte Folge von Eigenschwingungen ausführen, welche sich mathematisch bekanntlich als reine Sinusbewegungen ausdrücken lassen. Seit den Zeiten von *Bernoulli* hat man gelernt, eine beliebige freie Schwingung eines solchen Systems aufzufassen als einen Superpositionsvorgang aus einer nötigenfalls unbegrenzt fortschreitenden Reihe solcher mit verschiedener Stärke vertretenen Eigenschwingungen. (Man denke etwa an die Helmholtzsche Theorie der Klangfarbe.) Das Gebiet der harmonischen Analyse ist nichts als eine Ausführung dieses Gedankens. Mathematisch gesprochen handelt es sich um die Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche nach Sinusfunktionen fortschreitende Reihen, sogenannte Fouriersche Reihen. Jedes andere Schwingungsproblem, so z. B. das der schwingenden Membran oder Platte, führt auf andere solche Eigenfunktionensysteme und entsprechende Reihenentwicklungen. Die Theorie der symmetrischen Integralgleichungen faßt nun alle diese bisher getrennt nebeneinanderstehenden Dinge unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammen; sie lehrt, wie man willkürliche Funktionen nach den Eigenfunktionen einer symmetrischen Integralgleichung entwickeln kann, und da sich andererseits alle die genannten Schwingungsprobleme als Integralgleichungsprobleme umschreiben lassen, so hatte man hier einen einheitlichen Zugang zu diesem wichtigen Gebiet der Reihenentwicklungen gefunden und konnte auf dem betretenen Wege viel weitergehende mathematische Resultate erzielen, als das vorher gelungen war. Zahlreiche frühere Untersuchungen über diese Fragen — ich nenne hier nur die treffend erschauten, aber mathematisch nicht genügend begründeten Gedankenbildungen von Lord *Rayleigh* in seiner „Theorie of sound" — erhielten so eine gemeinsame Basis. Diesen Untersuchungen ist ein großer Teil der zweiten Hilbertschen Abhandlung gewidmet: doch ist in ihr noch mehr enthalten: die Anwendung der Integralgleichungstheorie auf die Randwertaufgaben der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Auch dieses, mit dem vorgenannten in engem Zusammenhange stehende Gebiet erfährt hier entscheidende Förderung.

In ein ganz anderes Anwendungsgebiet führt uns die dritte Abhandlung: hier wird ein außerordentlich schwieriges, bis dahin ganz unzugängliches Fundamentalproblem aus der funktionentheoretischen Theorie der linearen Differentialgleichungen angepackt und mit kräftigen Fäusten bezwungen, und ebenso zeigen die weiteren Abhandlungen in den verschiedensten Anwendungen auf Geometrie, Funktionentheorie, mathematische

Physik usw., wie mannigfach die neuen Ideen sich verwenden lassen.

Von der größten prinzipiellen Bedeutung ist jedoch ein allgemeiner Gedanke, der sich bei *Hilbert* aus der Integralgleichungstheorie herausschält; das ist die Idee der Lehre von Funktionen unendlich vieler Veränderlicher. Man kann die Analogie der Integralgleichung mit einem gewöhnlichen linearen Gleichungssystem am einfachsten dadurch kennzeichnen, daß man an Stelle eines Gleichungssystems mit 100 oder 1000 oder n Unbekannten durch einen kühnen Grenzübergang ein solches von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten setzt. Welche großen mathematischen Schwierigkeiten hinter einer solchen Theorie unendlicher Gleichungssysteme stecken, läßt sich dem Außenstehenden nicht so leicht begreiflich machen; genug, daß es *Hilbert* gelang, diese Schwierigkeiten zu überwinden und eine Theorie der unendlichen linearen Gleichungssysteme sowie der quadratischen Funktionen von unendlich vielen veränderlichen Größen zu schaffen, welche an Einfachheit und Durchsichtigkeit der Ergebnisse und Methoden den elementaren Theorien nicht nachsteht. Aus dieser allgemeinen Theorie ergeben sich dann die Sätze über Integralgleichungen und die Methoden ihrer Behandlung als fast selbstverständliche Forderungen. Aber diese neuen Gedanken weisen über das hiermit erreichte Ziel hinaus. Schon bei der Lehre von den quadratischen Funktionen von unendlich vielen Variabeln ergeben sich, wenn man die Voraussetzungen nicht zu eng faßt und den Dingen tiefer auf den Grund geht, Resultate von ganz neuartigem Charakter, wie sie bei der gewöhnlichen Theorie und ihrem geometrischen Bilde, der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung im Raume, keineswegs auftreten; neue Ergebnisse, welche auch zu alten, schwer zugänglichen Theorien, z. B. der berühmten Kettenbruchtheorie des holländischen Mathematikers *Stieltjes* in engem Zusammenhange stehen und diese Dinge neu beleuchten. Aber wir erheben uns erst dann zu der ganzen Höhe der prinzipiellen Auffassung vom Wesen der großen Fragen aus der mathematischen Analysis, wenn wir der allgemeinen Hilbertschen Idee von den Funktionen unendlich vieler Variabeler folgen. Für den Physiker scheint diese Idee etwas durchaus nicht Fernliegendes zu sein. Ihm ist es als eine Selbstverständlichkeit bewußt, daß es neben den Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden viele physikalische Systeme gibt, welche nicht endlich viele Freiheitsgrade besitzen, d. h. deren Lage in einem Zeitmoment sich nicht durch Angabe einer bestimmten Anzahl von Größen, der „Koordinaten" oder unabhängigen Variabeln des Systems charakterisieren läßt, sondern weitergehende Festlegungen erfordert; so z. B. ist die Lage eines starren Körpers durch die Angabe seiner Schwerpunktskoordinaten im Raume und der Richtungen seiner Trägheitsachsen festgelegt, also durch endlich viele Koordinaten, während die Lage einer schwingenden Membran oder Saite nie durch endlich viele Zahlen eindeutig charakterisiert werden kann, sondern stets erst durch den Verlauf einer ganzen, von ihr eingenommenen Fläche oder Linie, also einer Funktion bestimmt ist. Wir haben es hier eben mit Systemen von unendlich vielen Freiheitsgraden zu tun. In der Tat kann man den Verlauf einer Funktion, gleichviel ob diese nun durch eine Kurve oder Fläche repräsentiert wird, durch Angabe einer unendlichen Folge von „Koordinaten" festlegen, etwa indem man die Funktion in Fouriersche Reihen oder verwandte Reihen entwickelt denkt und dann die Koeffizienten der Entwicklung als die unabhängigen Bestimmungsstücke ansieht. Die Energie und alle sonst mit dem System zusammenhängenden physikalischen Größen erscheinen dann als Funktionen dieser unendlich vielen Bestimmungsstücke, d. h. eben als Funktionen von unendlich vielen Variabeln. Mathematisch stoßen wir ebenfalls auf Schritt und Tritt in der Analysis auf diesen Begriff. Überall, wo eine Größe von dem Verlauf einer Funktion abhängt, wie die Länge einer Kurve vom Verlaufe der Kurve oder die Höhe des Schwerpunktes einer Fläche vom Verlaufe dieser Fläche, z. B. überall in der Variationsrechnung, aber auch sonst in der Theorie der Differentialgleichungen, in der ganzen mathematischen Physik usw. haben wir es mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln zu tun, oder wie *Volterra*, der bedeutende italienische, sich in ähnlichen Gedankengängen bewegende Mathematiker, sie nennt, mit „Linienfunktionen"; die meisten Theorien der mathematischen Analysis sind nichts als Spezialuntersuchungen über solche Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen.

Lassen sich nun alle diese Spezialuntersuchungen in einer einheitlichen Theorie der Funktionen unendlich vieler Variabler zusammenfassen? Im Falle der Integralgleichungen hat sich der Gedanke aufs beste bewährt: aber ist das allgemeine Ziel nicht allzuweit, allzuumfassend gesteckt, um auch nur einige Aussicht auf Erfolg zu bieten? Die Frage scheint nicht richtig gestellt. Zwar ist es wunderbar genug, daß in der allgemeinen Theorie der Funktionen unendlich vieler Veränderlicher, wie *Hilbert* in einer Arbeit gezeigt hat, sich überhaupt mathematische Sätze aussprechen und beweisen lassen, welche nicht trivial sind; aber für den Moment liegt hierin nicht das Schwergewicht der allgemeinen Auffassung; ausschlaggebend bleibt vor allem die ordnende und klärende Wirkung, welche von der Idee einer solchen allgemeinen Funktionentheorie auf die ganze Methodik und Ideenbildung analytischer Untersuchungen ausstrahlt; mit einem Kantischen Ausdruck möchte man sagen, daß vorläufig die Theorie der unendlich vielen Veränderlichen kein konstitutives, sondern ein regu-

latives Prinzip der Analysis bedeutet, ein Wegweiser zur Orientierung der Gedankenbildungen mehr als ein Forschungsmittel. Gerade in dieser Hinsicht hat die Hilbertsche Idee schon starke Wirkung ausgeübt und scheint dazu berufen, noch reiche Früchte zu zeugen.

Wenn es auch in dem Rahmen dieses Aufsatzes nicht möglich ist, im einzelnen ein Bild von der Tiefe und Kraft des Analytikers *Hilbert* zu geben, dessen wahrhaft radioaktives wissenschaftliches Temperament mittelbar oder unmittelbar die meisten Mathematiker der letzten Generationen angeregt hat, so hoffe ich doch, einen Eindruck vermittelt zu haben, von dem aufs Ganze, auf die Einheit der Wissenschaft gerichteten Eros, welcher der wissenschaftlichen Persönlichkeit den Stempel aufdrückt und dem Träger in einer Epoche der Einzelleistung, Zersplitterung und Zerfaserung in der Wissenschaft einen ganz besonderen Platz anweist.

Hilbert und die Physik.

Von M. Born, Göttingen.

Im Jahre 1905 fanden in Göttingen Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars über Elektronentheorie statt, die *Minkowski* und *Hilbert* gemeinsam leiteten. Die Anregung zu diesem Unternehmen, das die beiden befreundeten Mathematiker von ihrem eigentlichen Arbeitsgebiet abzog und sie zu tiefem Eindringen in die Nachbarwissenschaft veranlaßte, mag damals von *Minkowski* ausgegangen sein, der von den Geheimnissen und Rätseln der Lorentzschen Elektrodynamik gelockt wurde und darin zugleich ein lohnendes Feld der Betätigung für seine geometrischen und algebraischen Kräfte erschaute. Der Schreiber dieser Zeilen, dem es vergönnt war, an diesem Seminar als Student teilzunehmen, erinnert sich an anregende und aufregende Stunden, die mit Diskussionen über die Fitz-Geraldsche Kontraktion, die Lorentzsche Ortszeit und andere, damals noch ganz phantastisch erscheinende Ansätze der Elektrodynamik erfüllt waren, und an denen sich auch *Hilbert* häufig klärend und auf Klarheit dringend beteiligte. Diese Übungsstunden sind bemerkenswert geworden, weil hier die beiden Mathematiker die Anregungen schöpften, die sie später, jeden zu seiner Zeit, zum Eingreifen in die Entwicklung der Relativitätstheorie führten.

Minkowskis Leistungen auf diesem Gebiete sind bekannt genug. Zu jener Zeit, als *Einsteins* erste, berühmte Arbeit erschien, die die Relativierung der Zeit enthielt, hatte *Minkowski* die mathematische Struktur der Feldgleichungen des Äthers und ihre Darstellung in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt schon entdeckt und die Bedeutung der Invarianz der Naturgesetze gegenüber der Lorentzschen Transformationsgruppe erkannt. Aber er trat erst 1908 mit seinen Gedanken an die Öffentlichkeit, als es ihm gelungen war, die Feldgleichungen für bewegte, ponderable Körper aus dem Relativitätsprinzip abzuleiten.

Hilbert verfolgte damals die Untersuchungen des Freundes mit einer Anteilnahme, die sich oft zur Begeisterung steigerte; denn in ihm wohnte jener Glaube an die Einfachheit und Begreifbarkeit der Natur, der zum Wesen des Naturforschers gehört, aber beim Mathematiker durchaus nicht immer zu finden ist, und er sah in *Einsteins* und *Minkowskis* Resultaten Erfüllung dieses Glaubens. Aber er selbst trat zunächst nicht mit eigenen Arbeiten physikalischer Richtung hervor, auch dann nicht, als *Minkowski* 1909 plötzlich starb und eine Fülle von Problemen ungelöst zurückließ. Es war die Periode, in der *Hilbert* seine Theorie der Integralgleichungen und der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln zum Abschluß brachte. Wenn er auch durch diese Untersuchungen ganz erfüllt wurde und nicht zu produktiver Tätigkeit auf dem von *Minkowski* gewiesenen Wege kam, hat er doch seit jener Zeit nie mehr aufgehört, sich für physikalische Probleme zu interessieren. Auch die *Lehre von den Integralgleichungen* war ja mit den Methoden der klassischen theoretischen Physik aufs engste verknüpft, vor allem mit den Randwertaufgaben, die in der Theorie des Potentials und vieler Differentialgleichungen der Physik auftreten. Die theoretischen Physiker hatten hier zwei wesentlich verschiedene Lösungsmethoden entwickelt, die *Methode der Reihen* nach dem Vorbilde der Fourierschen Reihe und die *Methode der Greenschen Funktion*. Man kann diese Verfahren etwa an dem Beispiel der Wärmeleitung in einem dünnen Stabe so kennzeichnen: Entweder faßt man die Temperaturverteilung als Superposition von einfach harmonischen (sinusförmigen) Temperaturwellen auf (Reihenentwicklung nach *Fourier*), oder man denkt sich an jeder Stelle des Stabes eine unendlich kleine Wärmequelle und bestimmt diese so, daß ihr Zusammenwirken die tatsächliche Temperaturverteilung erzeugt (Integralgleichung mit der Greenschen Funktion als Kern). *Hilbert* stellte nun ganz allgemein die Beziehung dieser Ansätze zu den linearen Integralgleichungen zweiter Art her, und es gelang ihm auf diesem Wege, nicht nur alle die mannigfaltigen Theorien der physikalischen Differentialgleichungen unter einen umfassenden Gesichtspunkt zusammenzufassen, sondern auch viele Lücken auszufüllen, die der Mathematiker in diesen Gebieten schmerzlich emp-

findet, Sätze über Existenz von Lösungen und Konvergenz von Reihen, über deren Schwierigkeit der Physiker sich leichten Sinns, auf Beute lüstern, kühn hinwegsetzt. Heute erscheinen z. B. sämtliche Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik als Übertragungen der Theorie von den Hauptachsen eines Ellipsoides auf den Fall des „Raumes von unendlich vielen Dimensionen", d. h. der Mannigfaltigkeit aller Funktionen, die sich in Reihen mit abzählbar vielen Koeffizienten (wie Potenzreihen, Fourierreihen usw.) entwickeln lassen.

Wurde so eine große Übersicht, Strenge und Klarheit gewonnen, so hatte der rechnende Physiker doch durch Benutzung der Integralgleichungen nur selten Vorteil; meist erwiesen sich für praktische Rechnung die alten Differentialgleichungsmethoden als bequemer, und in neuerer Zeit ist es auch *Courant* gelungen, die allgemeinen Existenz- und Konvergenzsätze mit den Methoden der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen in sehr durchsichtiger Weise direkt zu begründen. Geht man auf den physikalischen Ursprung der mathematischen Gleichungen zurück, so findet man als *primären* Ausdruck der Erfahrungstatsachen und Hypothesen manchmal die Integralgleichung, manchmal die Differentialgleichung; in der Lehre vom elektrischen Gleichgewicht z. B. führt die Annahme von Kräften, die nach dem Coulombschen Gesetze in die Ferne wirken, direkt zu einer Integralgleichung für die Dichte der Ladungsverteilung, dagegen liefern jene Theorien, bei denen die Wirkung sich von Stelle zu Stelle fortpflanzt und die seit *Faraday* und *Maxwell* die Lehre vom elektromagnetischen Felde beherrschen, primär eine partielle Differentialgleichung (Poissonsche Gleichung). Mathematisch sind beide Ansätze äquivalent, sofern die Differentialgleichung mit den richtigen Anfangs- und Grenzbedingungen versehen wird. Aber es gibt auch Gebiete der Physik, wo keine Wahl ist, sondern wo die geltenden physikalischen Begriffe eindeutig auf eine Integralgleichung als Ausdruck der Tatsachen führen. *Hilbert* fand ein solches Gebiet zuerst in der *kinetischen Gastheorie*, und er hat die Sammlung seiner Abhandlungen über Integralgleichungen (B. G. Teubner, 1912) mit der Darstellung dieser Theorie abgeschlossen, offensichtlich hoch erfreut über die Macht des von ihm geschaffenen analytischen Hilfsmittels, die sich hier bei der Aufklärung eines in seiner logischen Struktur bis dahin recht dunklen Teils der Molekularphysik bewährte.

Maxwell und *Boltzmann* haben die Hypothesen der kinetischen Gastheorie folgendermaßen in eine einzige Gleichung zusammengefaßt: Es seien x, y, z die Koordinaten und ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten einer Molekel; die Anzahl der Molekeln, die in einem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ und einem Geschwindigkeitsbereich $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ liegen, sei $F\,dx\,dy\,dz\,d\eta\,d\zeta$, wo die „Verteilungsfunktion" F außer von $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ noch von der Zeit t abhängen wird. Ist F bekannt, so kann man alle beobachtbaren Größen durch Mittelwertbildung berechnen, z. B. die sichtbare, mittlere Geschwindigkeit als

$$\frac{\int F\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\int F\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}$$

Zur Bestimmung von F muß man bedenken, daß die totale zeitliche Änderung von F unter der Wirkung einer beschleunigenden Kraft mit den Komponenten X, Y, Z:

$$D(F)=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta+\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{X}{m}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{Y}{m}+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{Z}{m}$$

durch die Zusammenstöße erzeugt wird, die einige Molekeln aus einem betrachteten Gebiete herauswerfen, während dafür andere hineingelangen. Unter der Annahme vollkommen ungeordneter Molekularbewegung ist die resultierende Änderung von F ein Integral $J(F)$, dessen Integrand quadratisch von F abhängt; daher ergibt sich eine Integro-Differentialgleichung:

$$D(F)=J(F)$$

die die exakte Grundlage aller gaskinetischen Folgerungen bildet.

Solche Folgerungen sind von *Maxwell, Boltzmann* und anderen gezogen worden, und es hat sich gezeigt, daß man die Gesetze der makroskopischen Bewegung und der thermischen Vorgänge in Gasen qualitativ richtig erhält. Aber die Kette der mathematischen Schlüsse war nicht eindeutig und willkürfrei; man mußte an manchen Stellen zu Mittelwertsbildungen die Zuflucht nehmen, weil die strenge Rechnung nicht durchführbar erschien, und hierdurch kam eine Unsicherheit in die Berechnung der gastheoretischen Konstanten (wie Wärmeleitungs- und Reibungskoeffizient), deren eindeutige Festlegung gerade das Hauptziel der Theorie ist. Hier griff nun *Hilbert* ein. Er bemerkte, daß das von den Physikern bei der Lösung der Grundgleichung eingeschlagene Näherungsverfahren aufgefaßt werden kann als Reihenentwicklung nach Potenzen eines Parameters, der der mittleren freien Weglänge der alten Theorie entspricht; dabei gibt die erste Näherung in bekannter Weise die Gesetze des ruhenden Gases, also vor allem für F das Maxwellsche Verteilungsgesetz, die höheren Näherungen aber werden lineare Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern. Auf diese läßt sich nun die allgemeine Theorie der Integralgleichungen anwenden und liefert zwangsläufig und ohne Willkür nicht nur die mechanischen und thermischen Gesetze der Gase, sondern auch eindeutige Rechenvorschriften, aus denen sich die Konstanten numerisch berechnen lassen, sobald die Gesetze der beim Zusammen-

stoß in Wirksamkeit tretenden anziehenden und abstoßenden Kräfte bekannt sind. Umgekehrt ist damit zum erstenmal ein eindeutiger Schluß von den beobachteten Gaskonstanten auf die Molekularkräfte möglich, und solche Rechnungen sind inzwischen von *Chapman* und *Enskog* (mit gewissen Modifikationen des Hilbertschen Verfahrens) durchgeführt worden. Das hierdurch geschaffene Material wiederum konnte *Debye* verwenden, als er seine elektrische Theorie der Molekularkräfte an der Erfahrung prüfen wollte. So haben die von *Hilbert* erdachten mathematischen Methoden mittelbar die moderne Atomforschung befruchtet.

Das von *Hilbert* zur Lösung der gaskinetischen Grundgleichung entwickelte Verfahren ist übrigens von allgemeinerer Bedeutung und hat sich auch in anderen Disziplinen als fruchtbar erwiesen. Man kann es kurz etwa so beschreiben: Bei den sukzessiven Näherungen ist die erste Gleichung homogen, die folgenden sind inhomogen mit derselben linken Seite, z. B. in der Gastheorie:

$$J(F_0) = 0, \quad J(F_1) = D(F_0) \ldots .$$

Wenn nun die erste Gleichung auflösbar ist, so kann es die zweite nicht immer sein, sondern nur dann, wenn die rechte Seite gewissen Bedingungen genügt. Diese Auflösbarkeitsbedingungen, denen die in F_0 vorkommenden Parameter (Dichte, Temperatur, Komponenten der mittleren Geschwindigkeit) genügen müssen, stellen nun gerade die makroskopischen Gesetze der Bewegung und des Wärmestromes dar.

Dieser Gedanke liefert das allgemeine Verfahren, um zwangsläufig, ohne willkürliche Mittelwertbildung aus den verwickelten Gesetzen für die ungezählten Variabeln der molekularen Welt die einfachen Gleichungen für die wenigen meßbaren Größen zu gewinnen. Die beschriebene Methode wurde von einigen Schülern *Hilberts* auf Probleme der Ionenbewegung in Elektrolyten und der Elektronenbewegung in Metallen erfolgreich angewandt; besonders bewährt hat sie sich in der kinetischen Theorie der festen Körper, und der Verfasser dieses Aufsatzes wußte das Verdienst *Hilberts* um diesen Fortschritt nicht besser auszudrücken, als daß er sein Buch über Dynamik der Kristallgitter dem verehrten Lehrer widmete.

Hilbert entdeckte noch einen zweiten Fall, wo der physikalische Ansatz direkt auf eine Integralgleichung führt, die *elementare Strahlungstheorie*. Hierunter sind jene einfachen, zuerst von *Kirchhoff* aufgestellten Gesetze zu verstehen, die das geometrische und energetische Verhalten der Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht regeln, und deren bekanntestes gewöhnlich so formuliert wird: Das Verhältnis von Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen ist im Falle reiner Temperaturstrahlung eine universelle Funktion der Temperatur und der Wellenlänge, also unabhängig von der Natur und dem sonstigen Zustande der Körper. *Planck* hatte an die Stelle der Kirchhoffschen Integralbegriffe „Emissions- und Absorptionsvermögen" die auf das Volumenelement bezogenen Größen „Emissionskoeffizient" ε und „Absorptionskoeffizient" α eingeführt und gezeigt, daß dann die Kirchhoffschen Sätze sich in die eine Formel fassen lassen: Die aus ε, α und der Lichtgeschwindigkeit q gebildete Größe $\frac{q^2\varepsilon}{\alpha}$ hängt nicht ab von der Natur der Substanz, sondern ist eine universelle Funktion der Temperatur und der Schwingungszahl. *Hilberts* erste Arbeit geht darauf aus, diesen Satz ohne die von den Physikern gemachten, vereinfachenden Annahmen (homogene, einfach begrenzte Körper usw.) zu begründen, er läßt die drei Parameter ε, α, q als beliebige Funktionen des Ortes zu und zeigt dann, daß die Forderung des Energiegleichgewichts für jede einzelne Farbe zu einer homogenen Integralgleichung zweiter Art für ε führt, deren einzige Lösung $\varepsilon = \frac{\alpha}{q^2}$ konst. ist.

Um diese, mathematisch höchst elegante Arbeit entstand nun eine wenig erfreuliche Polemik zwischen *Hilbert* und dem Physiker *E. Pringsheim*. Dieser warf *Hilbert* vor, daß er unter Betonung der Unzulänglichkeit aller früheren Beweise des Kirchhoffschen Satzes gerade die Tatsache als Voraussetzung seines Beweises gebraucht habe, die von *Kirchhoff* und allen übrigen Physikern als der tieferen Begründung besonders bedürftig angesehen wird und deren Ableitung der Hauptteil der Kirchhoffschen Arbeit ist: nämlich die Tatsache, daß die Strahlung jeder Wellenlänge für sich im Gleichgewicht ist und kein Energieaustausch zwischen verschiedenen Spektralbezirken stattfindet. Dieser Vorwurf ist durchaus berechtigt, und *Hilbert* hat, sobald er auf diesen Mangel aufmerksam wurde, seine Überlegungen in der geforderten Richtung ausgestaltet; dabei hat er die axiomatische Darstellung angewandt, wohl in der Überzeugung, daß nur auf diesem Wege Klarheit in das Knäuel physikalischer Voraussetzungen und mathematischer Schlüsse zu bringen sei. Gegen diese Wendung erhob nun *Pringsheim* energisch Einspruch, und es ist äußerst interessant, an diesem Falle die Verschiedenheit physikalischen und mathematischen Denkens zu verfolgen. Der Physiker geht darauf aus, zu erforschen, wie die Dinge in der Natur sind; Experiment und Theorie sind ihm dabei nur Mittel zum Zweck, und im Bewußtsein der unendlichen Kompliziertheit des Geschehens, die ihm bei jedem Experiment entgegentritt, wehrt er sich dagegen, irgendeine Theorie als endgültig anzusehen. Darum verabscheut er das Wort „Axiom", dem im gewöhnlichen Sprachgebrauch der Sinn der endgültigen Wahrheit anhaftet, in dem gesunden Empfinden, daß Dogmatismus der schlimmste Feind der Naturwissenschaft sei. Der

Mathematiker aber hat nicht mit Tatsachen des Geschehens, sondern mit logischen Zusammenhängen zu tun, und in *Hilberts* Sprache bedeutet axiomatische Behandlung einer Disziplin keineswegs die endgültige Aufstellung bestimmter Axiome als ewiger Wahrheiten, sondern die methodische Forderung: Nenne deine Voraussetzungen am Anfang deiner Überlegung, halte dich daran und untersuche, ob diese Voraussetzungen nicht zum Teil überflüssig sind oder gar einander widersprechen. Diese logische Konsequenz ist zweifellos das Ideal jedes Erkenntnisgebietes, aber je weiter man sich von der reinen Mathematik entfernt, um so weniger erfüllt (oder erfüllbar) ist auch dieses Ideal, und selbst in der exakten Physik findet sich nur allzu häufig mitten in der Entwicklung ein Satz wie: „wenn wir nun die Annahme machen, daß usw.“. *Pringsheims* Polemik, in der Betonung des physikalisch Wichtigen durchaus berechtigt, schoß nun sowohl in der Form als auch in der Beurteilung von *Hilberts* Absichten über das Ziel hinaus. Er verkannte nicht nur den Sinn der axiomatischen Darstellungsweise, den wir soeben erläutert haben, sondern er warf auch *Hilbert* einen Fehler vor. Dieser hatte nämlich zum Beweise der Unmöglichkeit, aus der Annahme des Gleichgewichts der Gesamtenergie aller Wellenlängen die Kirchhoff-Planckschе Formel abzuleiten, die Größen q und α unabhängig von λ beide gleich 1 gesetzt; *Pringsheim* hält dies für unzulässig, weil es in der Natur keine Körper gibt, die Absorption ($\alpha = 1$), aber keine Dispersion ($q = 1$, d. h. gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) haben. Mit demselben Rechte könnte man sagen: Der Lobatschewskysche Beweis der Unmöglichkeit, das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen *Euklids* herzuleiten, ist falsch, denn die dabei verwendete nicht-euklidische Geometrie existiert in der Wirklichkeit nicht. *Hilbert* konnte diesen Vorwurf *Pringsheims* mit Recht als Mißverständnis zurückweisen.

Pringsheim hat noch andere Einwände von geringerem Gewichte gegen *Hilberts* Arbeit vorgebracht, z. B. daß er die Zerstreuung und Reflexion nicht berücksichtigt habe. In einer zusammenfassenden Bearbeitung (Göttinger Nachrichten 1914) hat dann *Hilbert* gezeigt, daß seine Beweisführung auch bei Berücksichtigung aller dieser Vorgänge gültig bleibt; diese letzte Abhandlung *Hilberts* über das Gebiet der elementaren Strahlungslehre wird immer als die strengste und durchsichtigste Darstellung dieser Theorie zu gelten haben.

Gleichwohl fand sie bei den Physikern wenig Beachtung; das lag hauptsächlich daran, daß die tieferen Probleme der Strahlungstheorie, vor allem das Gesetz der spektralen Energieverteilung des schwarzen Körpers, an Wichtigkeit weit voranstanden. Denn hier ergaben sich Zusammenhänge mit den letzten Prinzipien der Physik, die heute gerade durch die Erforschung der Strahlungsgesetze in einer Wandlung begriffen sind. Auch *Hilbert* hat niemals die Bedeutung der Kirchhoffschen Strahlungsgeometrie überschätzt, sondern seit seinem ersten Eindringen in die Gedanken der modernen Physik den Schwerpunkt der Fragestellung in den Problemen der Statistik und der Quanten gesehen. Mehrere Jahre hat er viel Zeit und Arbeit darauf gewandt, diese Gebiete mit der Schärfe seiner Logik zu durchdringen und zu erhellen; aber er hat seine Resultate niemals publiziert, sondern nur seinen Schülern in Vorlesungen bekanntgemacht; er begann mit einem Kolleg über seinen Aufbau der kinetischen Gastheorie und schloß daran eine Reihe von Vorlesungen über Molekulartheorie, statistische Mechanik, Nernstsches Wärmetheorem, Quantentheorie u. ä. Die wunderbare Anwendung, die die klassische Hamilton-Jacobische Mechanik in der Quantentheorie findet, bot dabei einen Anknüpfungspunkt an berühmte ältere Vorlesungen *Hilberts* über Variationsrechnung und höhere Mechanik. Zugleich begann *Hilbert* die von ihm geleiteten Übungen des mathematischen Seminars, anknüpfend an die Tradition der letzten Minkowskischen Zeit, hauptsächlich den Problemen der theoretischen Physik zu widmen, und bis heute werden diese Seminarstunden über das Thema „Struktur der Materie“ fortgesetzt. *Minkowskis* Rolle übernahm der Physiker *P. Debye*, der, gleich bedeutend als Experimentator und Theoretiker, in diese Übungsstunden den lebendigen Pulsschlag der physikalischen Forschung hereinzutragen wußte.

Natürlich spielte bei den Diskussionen des Seminars die *Relativitätstheorie* immer eine große Rolle, und man verfolgte mit großem Anteil die Arbeiten, mit denen *Einstein* ganz allmählich zu seiner allgemeinen Gravitationstheorie vordrang. Aber auch die Abhandlungen von *Abraham*, *Nordstroem* und *Mie*, die zum selben Ziele strebten, wurden studiert, und *Hilbert* wurde besonders von den Ideen *Mies* gefesselt, der eine „Theorie der Materie“ auf der Grundlage des Relativitätsprinzips aufzubauen versuchte. *Mie* gelang es, die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in rationeller Weise so zu verallgemeinern, daß sie ihren linearen Charakter verloren, und er verfolgte das Ziel, die Existenz der materiellen Urteilchen, besonders des Elektrons, aus den Feldgleichungen abzuleiten. Man versteht, daß dieses Problem für einen Mathematiker wie *Hilbert* besonders anziehend war, denn die Grundlagen der Mieschen Theorie ließen sich nicht nur in sehr durchsichtiger Weise mathematisch formulieren, sondern erforderten auch bei der Durchführung des Programms einen beträchtlichen Aufwand nicht trivialer analytischer Hilfsmittel. Aber *Hilbert* sah weiter als der Begründer dieser Theorie, indem er die Brücke zu *Einsteins* Gedanken über die allgemeine Relativität und Gravitation entdeckte.

Damals, im Jahre 1914, hatte *Einstein* erkannt, daß sein Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere bei konsequenter Durchführung notwendig dazu führen mußte, die Vorstellung eines a priori gegebenen, euklidischen Raumes und einer absoluten Zeit fallen zu lassen, vielmehr die Raum-Zeit-Welt als beliebige 4-dimensionale Mannigfaltigkeit im Riemannschen Sinne aufzufassen, wobei die Maßbestimmung durch eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale gegeben ist. Die 10 Koeffizienten dieser Differentialform mußten die Gravitation bestimmen, und es kam darauf an, die für sie gültigen Gesetze aufzufinden unter Ausnutzung der Andeutungen, die durch die Forderung der Invarianz und durch den Anschluß an die Newtonsche Gravitationstheorie gegeben waren. Während *Einstein* zunächst vergeblich, sodann auf großen Umwegen sich diesen Gesetzen zu nähern suchte, kam *Hilbert* gänzlich unabhängig auf einem anderen Wege zur Lösung dieses Problems, und der Zufall wollte, daß beide Forscher fast genau gleichzeitig am Ziele anlangten. *Einstein* legte seine beiden grundlegenden Abhandlungen „Zur allgemeinen Relativitätstheorie" am 11. und 25. November 1915 der Berliner Akademie vor, *Hilbert* seine erste Note über die „Grundlagen der Physik" am 20. November der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. Dieses merkwürdige Zusammentreffen hat aber keineswegs zu irgendwelchen Prioritätsstreitigkeiten zwischen den beiden Männern Anlaß gegeben; vielmehr führte der Briefwechsel, der aus dem Austausch der wissenschaftlichen Ansichten entstand, zu persönlichem Zusammentreffen und freundschaftlichem Verkehr. *Hilbert* blieb sich stets bewußt und hat dem in zahlreichen Vorträgen und in seinen Abhandlungen Ausdruck gegeben, daß die Hauptsache durchaus die großartige physikalische Idee *Einsteins* sei; wie für *Vischers* „Auch Einer" sich „das Moralische immer von selbst versteht", so für einen *Hilbert* „das Mathematische", selbst da, wo es wie in der Relativitätstheorie die höchsten geometrischen Abstraktionen betrifft. Es war übrigens keineswegs sofort offenbar, daß die Ansätze *Einsteins* und *Hilberts* gleichwertig, ja nicht einmal, daß sie miteinander verträglich seien. *Einstein* baute seine Gravitationsgesetze induktiv auf; dabei machte er keinerlei Annahmen über das Wesen der das Gravitationsfeld erzeugenden Materie, sondern charakterisierte diese durch ihren Energie-Impuls-Spannungs-Tensor. Seine Gravitationsformeln besagen, daß dieser Tensor der Materie überall proportional dem „verjüngten Krümmungstensor" ist, einer kovarianten Größe, die aus den Koeffizienten der fundamentalen Differentialform und ihren ersten und zweiten Ableitungen gebildet ist. *Hilbert* knüpft an die Gedanken an, die *Mies* „Theorie der Materie" zugrunde liegen; dabei wird die Materie durchaus als elektrisches Phänomen angesehen und durch ein „Viererpotential" mathematisch charakterisiert, dessen 4 Komponenten zugleich mit den 10 Komponenten des Schwerefeldes den Zustand der Welt in jedem Punkte beschreiben. Zur Bestimmung dieser 14 unbekannten Funktionen dient, wieder nach dem Vorbilde von *Mie*, ein invariantes Variationsprinzip; während dieses aber bei *Mie* nur invariant ist gegen die Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie, ist es bei *Hilbert* allgemein invariant, und daraus folgt, daß zwischen den 14 Differentialgleichungen für die 14 gesuchten Funktionen 4 Identitäten bestehen. In diesen 4 identischen Relationen zwischen den Gesetzen des Gravitationsfeldes und denen des elektrischen Feldes (den Maxwellschen Gleichungen) sah *Hilbert* selbst den Höhepunkt seiner Leistung, nämlich die Auffindung des Bandes zwischen den beiden Feldarten, die bisher nebeneinander beziehungslos bestanden. Aus einigen Stellen dieser Note *Hilberts*, besonders aus dem enthusiastischen Schlusse, geht deutlich hervor, daß er von seinen Feldgleichungen noch Größeres erwartete, nämlich die Erreichung des Ziels, das *Mie* vorgeschwebt hatte: die Ableitung des Elektrons und der Atome aus den Feldgesetzen. Diese Hoffnungen haben sich zwar nicht erfüllt; das Geheimnis der Materie und ihrer quantenhaften Struktur läßt sich wohl auf diesem formalen Wege nicht ergründen. Aber auch so bleibt *Hilberts* erste Note ein historisches Dokument: sie bedeutet zusammen mit den beiden gleichzeitigen Arbeiten *Einsteins* die Geburt der allgemeinen Relativitätstheorie. Außer *Einstein* selbst haben das wohl wenige sogleich erkannt; denn *Hilberts* Abhandlung ist äußerst schwer geschrieben, für Physiker geradezu unzugänglich. *Klein* hat das Verdienst, die Hilbertschen Gedanken sofort erfaßt und in klarer und einfacher Weise dargestellt zu haben; er fand sowohl für *Hilberts* erste Note, als auch für *Einsteins* Abhandlungen und für die zweite Note *Hilberts* die adäquate Form, indem er ihren mathematischen Inhalt den allgemeinen Ideen unterordnete, die er vor Jahrzehnten (1872) in seinem berühmten Erlanger Programm ausgesprochen hatte. Der Grundgedanke dieser Schrift ist die Erkenntnis, daß das Lehrgebäude der Geometrie oder irgendein in sich abgeschlossener Teil desselben (wie Analysis situs, projektive Geometrie, Kugelgeometrie usw.) aufgefaßt werden kann als Invariantentheorie einer bestimmten Gruppe von Transformationen. Die Riemannsche allgemeine Raumlehre erscheint von diesem Standpunkt aus als die Invariantentheorie bezüglich aller stetigen Transformationen der 3 Raumkoordinaten, bei denen eine quadratische Differentialform in sich übergeht; und von hier aus zur Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie ist nur ein Schritt, der in der Hinzufügung der Zeit als vierter Koordinate zu den 3 Raumabmessungen besteht. So waren die Mathematiker wohl präpariert zur schnellen Erfassung von *Einsteins* Lehre, und es ist verständlich, daß die führenden Mathematiker

Hilbert und *Klein* an der Entwicklung der Theorie lebhaften Anteil nahmen. Ja, die Ideen *Einsteins* erschienen ihnen so natürlich, daß sie den Widerstand gar nicht begreifen konnten, den die Relativitätstheorie nicht nur bei Laien, sondern auch innerhalb der Physik fand. Die Gegenargumente, die vorgebracht wurden, erhoben sich ja auch niemals über das niedrigste Niveau und mußten den an den Werken eines *Gauß, Riemann, Helmholtz* Geschulten nur lächerlich erscheinen.

Die schon oben erwähnte zweite Note *Hilberts* enthält außer einigen mathematischen Folgerungen aus den Feldgleichungen vor allem eine ausführliche Diskussion der Stellung des Kausalgesetzes zur allgemeinen Relativität. Nach der gewöhnlichen Fassung verlangt dieses, daß durch den Zustand der Welt in Gegenwart und Vergangenheit vermöge der Naturgesetze der Zustand der Welt in der Zukunft eindeutig und notwendig bestimmt sei. In der allgemeinen Relativitätstheorie muß man nun genau definieren, was unter „Zustand der Welt" eigentlich dabei zu verstehen sei; denn die Werte irgendwelcher physikalischen Parameter lassen sich durch Wechsel des Bezugssystems in andere Werte transformieren, können also nicht in jenem Satze als Bestimmungsstücke des physikalischen Zustandes gemeint sein. *Hilbert* gibt nun genau an, wie man den Zustand definieren muß, damit er einen „physikalischen Sinn" habe, und zeigt, daß dann das Kausalitätsprinzip in vollem Umfange gültig bleibt. Auch diese Frage hat dann *Klein* von seinem allgemeinen, gruppentheoretischen Standpunkte beleuchtet.

Hilbert hat seine Auffassung der Relativitätstheorie in mehreren Vorlesungen bekanntgemacht, wobei er zu immer größerer Eindringlichkeit und Klarheit der Darstellung gelangte. Im letzten Sommersemester hat er sogar ein populäres Kolleg vor einem riesigen Zuhörerkreis gehalten und dabei bewiesen, daß nur der, dem die logische Struktur eines schwierigen Gebietes vollständig durchsichtig ist, dieses vor einem Laienpublikum anschaulich, lebendig und gleichzeitig klar und streng vortragen kann.

Seit *Gauß* und *Weber* ist es eine Göttinger Tradition, daß Mathematik und Physik nicht nebeneinander, sondern miteinander fortschreiten. *Klein* hat diese Tradition besonders energisch gehütet und durch Einbeziehung der technischen Wissenschaften ausgebaut; sein Streben war, die hohe mathematische Forschung aus ihrer Isolierung zu befreien und sie durch Pflege der Anwendungen mit der Praxis, der Technik, zu verbinden, diese befruchtend und gleichzeitig von dieser befruchtet und sozial gestützt. *Hilbert* hat in nicht geringerem Maße im Sinne der Göttinger Überlieferung gewirkt, nur war sein Interesse weniger auf die Praxis, als auf die Prinzipien der Naturerkenntnis gerichtet; darum hat er seine mathematischen Kräfte in den Dienst der modernen Physik gestellt. Was diese ihm zu danken hat, davon sollen diese Zeilen berichten.

Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik.

Von Paul Bernays, Göttingen.

Wenn wir die geistigen Beziehungen der mathematischen Wissenschaften zur Philosophie betrachten, wie sie sich seit den Zeiten der Aufklärung entwickelt haben, so bemerken wir mit Befriedigung, daß gegenwärtig das mathematische Denken im Begriff ist, wieder jenen mächtigen Einfluß auf die philosophische Spekulation zu gewinnen, welchen sie bis zur Zeit *Kants* besaß, den sie dann aber auf einmal völlig einbüßte. Jene plötzliche Abwendung von dem mathematischen Denken geschah im Zeichen der allgemeinen Abkehr von dem Geiste der Aufklärungszeit, wie sie sich zu Anfang des 19. Jahrhunderts einstellte.

Jedoch war diese Ablösung der Philosophie von der exakten Wissenschaft nur eine einseitige. Während nämlich die herrschende Philosophie sich ganz der Mathematik entfremdete[1]), entwickelte sich bei den Mathematikern immer mehr eine philosophische Richtung.

Der wesentlichste Grund hierfür war, daß die Mathematik weit über den Rahmen hinaus wuchs, in dem sie sich zu den Zeiten *Kants* noch bewegte. Nicht nur, daß der Bereich der erforschten Tatsachen sich erheblich vergrößerte, sondern die ganze Anlage der Untersuchungen wurde großzügiger und die ganze Methode umfassender. Die Begriffsbildungen erhoben sich zu einer höheren Stufe der Allgemeinheit; die Bedeutung der Formel trat zurück gegenüber begrifflichen Abstraktionen und systematischen Leitgedanken. Ferner auch die Stellung zu den Grundlagen und dem Objekt der mathematischen Wissenschaften änderte sich.

Die Aufgabe der Geometrie wurde weiter gefaßt. Die geometrischen Begriffsbildungen wurden allgemeiner und machten sich immer mehr von der Bindung an die räumliche Vorstellung frei. Und in den neu entstandenen geometrischen Theorien hatte die Raumanschauung nicht mehr die Bedeutung der Erkenntnis-Grundlage, sondern

[1]) Unter den Philosophen, welche in dieser Hinsicht eine rühmliche Ausnahme machten, ist besonders *Bolzano* zu erwähnen, der als erster die strenge Begründung für die Theorie der reellen Zahlen gegeben hat.

sie wurde hier nur noch im Sinne einer anschaulichen Analogie angewendet.

Auch in der Arithmetik gelangte die Forschung zu einer wesentlichen Erweiterung ihrer Problemstellung. Einerseits wurden durch die Erfindung der Mengenlehre die Begriffe der Anzahl und der Ordnung in einer ganz neuen Weise verallgemeinert und auf unendliche Gesamtheiten übertragen. Andrerseits führte die Entwicklung der Algebra dazu, daß man nicht mehr ausschließlich die Zahlen und Größen als Objekte der Untersuchung ansah, vielmehr den rechnerischen Formalismus selbst zum Gegenstande nahm und sich ganz allgemein die Betrachtung der Formalismen zur Aufgabe machte. Die Zahlen sowie die Größen erschienen jetzt nur noch als etwas Spezielles, und je mehr man ihre Gesetzlichkeit unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachtete, um so mehr entwöhnte man sich, diese Gesetzlichkeit als selbstverständlich hinzunehmen.

So ging denn die ganze Entwicklung der Mathematik dahin, alles das, was vordem als einziger Gegenstand der Forschung galt und wovon die Grundeigenschaften als etwas für die Mathematik hinzunehmendes und keiner mathematischen Untersuchung fähiges noch bedürftiges erachtet wurden, dieses seines Ansehens der Ausschließlichkeit und Endgültigkeit zu berauben. Der Rahmen, den die frühere philosophische Ansicht, und auch noch die Kantische Philosophie, für die Mathematik abgesteckt hatte, wurde gesprengt. Die Mathematik ließ sich nicht mehr die Methode und die Grenzen ihrer Forschung von der Philosophie vorschreiben, sondern nahm die Erörterung ihrer methodischen Probleme selbst in die Hand. So wurden die Axiome der mathematischen Theorien des näheren auf ihre logischen Beziehungen hin untersucht, sowie auch die Schlußweisen einer genaueren Kritik unterzogen. Und je weiter man diese Probleme verfolgt hat, um so mehr hat das mathematische Denken an ihnen seine Fruchtbarkeit gezeigt und sich als unentbehrliches Hilfsmittel für die theoretische Philosophie erwiesen.

Zu dieser Entwicklung nun, welche bis in die Gegenwart reicht, hat in bedeutsamer Weise *David Hilbert* beigetragen. Was er auf diesem Gebiete geleistet hat, soll im folgenden geschildert werden.

Als *Hilbert* sich den Problemen zuwandte, welche es betreffs der Grundlagen des mathematischen Denkens zu lösen galt, hatte er nicht nur das Rüstzeug seiner umfassenden Beherrschung der mathematischen Methoden zur Verfügung, sondern er war auch vor allem durch seine menschliche Veranlagung gleichsam vorbestimmt für diese Aufgaben. Denn für ihn hatte die Mathematik die Bedeutung einer Weltanschauung, und er ging an jene grundsätzlichen Probleme mit der Gesinnung eines Eroberers, der bestrebt ist, dem mathematischen Denken einen möglichst umfassenden Machtbereich zu erkämpfen.

Bei der Verfolgung dieses Zieles kam es darauf an, den Fehler jener extremen rationalistischen Denker zu vermeiden, welche glaubten, daß durch reines Denken eine vollkommene Erkenntnis alles Wirklichen zu erlangen sei. Es konnte sich also nicht etwa darum handeln, alle Erkenntnis des Tatsächlichen in die Mathematik einzubeziehen, vielmehr war es zum Zwecke einer möglichst weiten Ausdehnung des Herrschaftsgebietes der Mathematik erforderlich, eine scharfe Grenzscheidung zwischen Mathematischem und Nichtmathematischem vorzunehmen, welche es erlaubte, alle mathematischen Bestandteile im Erkennen auch wirklich für die Mathematik in Anspruch zu nehmen.

In diesem Sinne hat auch tatsächlich *Hilbert* das Problem angefaßt. Sein erstes und größtes Werk auf dem Gebiet der Methodenfragen sind die im Jahre 1899 erschienenen *„Grundlagen der Geometrie"*. In dieser Schrift stellte *Hilbert* ein neues System von Axiomen für die Geometrie auf, welche er nach den Gesichtspunkten der Einfachheit und der logischen Vollständigkeit, unter möglichst enger Anknüpfung an die Begriffsbildungen *Euklids* wählte. Das Gesamtsystem der Axiome gliederte er in fünf Axiomgruppen und untersuchte nun genauer den Anteil, den die verschiedenen Axiomgruppen (sowie auch einzelne der Axiome) an dem logischen Aufbau der Geometrie haben.

Diese Untersuchung hat durch die Fülle an neuen, fruchtbaren Methoden und Gesichtspunkten, welche sie darbot, einen mächtigen Einfluß auf die Entwicklung der mathematischen Forschung ausgeübt. Jedoch liegt die Bedeutung von *Hilberts* Grundlagen der Geometrie keineswegs nur in dem rein mathematischen Gehalte. Was vielmehr diesem Werk seine Popularität verlieh und den Namen *Hilberts* weit über den Kreis seiner Fachgenossen hinaus berühmt machte, das war die neue methodische Wendung, welche hier dem Gedanken der Axiomatik gegeben wurde.

Das Wesen der axiomatischen Methode, d. h. der Methode, eine Wissenschaft aus Axiomen und Definitionen logisch zu entwickeln, besteht ja nach der geläufigen Auffassung darin, daß man von einigen wenigen Grundsätzen ausgeht, von deren Wahrheit man überzeugt ist diese als Axiome an die Spitze stellt und aus ihnen mit Hilfe des logischen Schließens Lehrsätze ableitet, deren Wahrheit dann ebenso sicher ist, wie die der Axiome, eben weil sie aus diesen logisch folgen. Bei dieser Ansicht wird das Augenmerk vor allem auf den Erkenntnischarakter der Axiome gerichtet. Ja, ursprünglich ließ man als Axiome überhaupt nur solche Sätze gelten, deren Wahrheit a priori einleuchtete. Und noch *Kant* war der Ansicht, daß der Erfolg und die Fruchtbarkeit der axiomatischen Methode in der Geometrie und in der Mechanik wesentlich darauf beruhe,

daß man in diesen Wissenschaften von Erkenntnissen a priori (den Axiomen der reinen Anschauung und den Grundsätzen des reinen Verstandes) ausgehen könne.

Allerdings hat man diese Forderung, daß ein jedes Axiom eine a priori erkennbare Wahrheit ausdrücken müsse, bald preisgegeben. Denn bei den mannigfachen Anlässen, welche sich besonders in der Weiterentwicklung der Physik zur Anwendung der axiomatischen Methode boten, ergab es sich sozusagen von selbst, daß man teils Erfahrungssätze, teils auch bloße Hypothesen als Axiome physikalischer Theorien wählte. Dabei erwies sich das axiomatische Verfahren besonders in den Fällen als fruchtbar, wo es gelang, durch die Aufstellung eines Axioms die Ergebnisse vielfältiger Erfahrungen in einer Aussage von allgemeinem Charakter zusammenzufassen. Ein berühmtes Beispiel hierfür bilden die beiden Sätze von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile erster und zweiter Art, welche *Clausius* in der Theorie der Wärme als Axiome an die Spitze stellte.

Dazu kam noch, daß der Glaube an die apriorische Erkenntnis der geometrischen Axiome bei den Forschern der exakten Wissenschaften — hauptsächlich infolge der nicht-euklidischen Geometrie und unter dem Eindruck der Argumente von *Helmholtz* — immer mehr verloren ging und so die empiristische Ansicht, nach welcher die Geometrie nichts anderes ist als eine Erfahrungswissenschaft, immer mehr Anhänger fand. Jedoch änderte dieses Abgehen vom Apriorismus nicht wesentlich den Gesichtspunkt, unter dem man die axiomatische Methode betrachtete.

Eine stärkere Wandlung wurde aber durch die systematische Entfaltung der Geometrie bewirkt. Die mathematische Abstraktion hatte sich, von der elementaren Geometrie ausgehend, weit über den Bereich der räumlichen Anschauung erhoben und zur Bildung von umfassenden Lehrgebäuden geführt, in welche die gewöhnliche Euklidische Geometrie sich einordnen ließ und innerhalb deren ihre Gesetzlichkeit nur als eine ganz spezielle neben anderen mathematisch gleichberechtigten erschien. Hiermit eröffnete sich eine neue Art von mathematischer Spekulation, mit Hilfe deren man die geometrischen Axiome von einem höheren Standpunkt betrachten konnte. Es zeigte sich aber sogleich, daß diese Betrachtungsweise mit der Frage nach dem Erkenntnischarakter der Axiome — welche man doch vordem für das einzig Bedeutsame an der axiomatischen Methode hielt — gar nichts zu schaffen hatte. Und somit ergab sich die Notwendigkeit einer reinlichen Scheidung zwischen den mathematischen und den erkenntnistheoretischen Problemen der Axiomatik. Die Forderung einer solchen Sonderung der Probleme hat *Klein* in seinem Erlanger Programm[2]) bereits in aller Klarheit ausgesprochen.

Nun war es das wesentliche an *Hilberts* Grundlegung der Geometrie, daß hier zum erstenmal in der Aufstellung des Axiomensystems von vornherein die Sonderung des Mathematischen und Logischen von dem Räumlich-Anschaulichen — und damit von der erkenntnistheoretischen Grundlage der Geometrie — restlos durchgeführt und mit voller Schärfe zum Ausdruck gebracht wurde.

Wohl spricht *Hilbert* in der Einleitung seines Buches den Gedanken aus, daß die Aufstellung der Axiome für die Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges eine Aufgabe sei, die „auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung" hinausläuft, und ebenso bemerkt er im ersten Paragraphen, daß jede einzelne der Axiomgruppen „gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung" ausdrückt. Aber diese Äußerungen stehen ganz außerhalb des axiomatischen Aufbaues; dieser selbst vollzieht sich ohne jegliche Bezugnahme auf die räumliche Anschauung.

Nun ist es freilich schon von jeher eine Anforderung an eine strenge axiomatische Begründung der Geometrie gewesen, daß die Beweise sich ausschließlich an dasjenige halten sollen, was in den Axiomen formuliert wird, dagegen nicht auf sonstige Art die räumliche Anschauung heranziehen dürfen. Und in neuerer Zeit hat besonders *Pasch* bei seiner Grundlegung der Geometrie[3]) auf die Durchführung dieser Forderung Gewicht gelegt und ihr auch vollkommen entsprochen.

Die Hilbertsche Axiomatik geht aber in der Ausschaltung der räumlichen Anschauung noch einen Schritt weiter. Hier wird die Heranziehung der räumlichen Vorstellung nicht nur bei den Beweisen, sondern auch in den Axiomen und den Begriffsbildungen gänzlich vermieden. Die Worte „Punkt", „Gerade", „Ebene" dienen nur als Namen für drei verschiedene Arten von Gegenständen, über welche unmittelbar nichts anderes vorausgesetzt wird, als daß die Gegenstände einer jeden Art ein fest bestimmtes System bilden. Alle weitere Charakterisierung erfolgt erst durch die Axiome. Desgleichen werden mit Ausdrücken wie „der Punkt A liegt auf der Geraden a" oder „der Punkt A liegt zwischen B und C" nicht die gewöhnlichen, anschaulichen Bedeutungen verbunden, vielmehr bezeichnen sie nur gewisse, zunächst unbestimmte Beziehungen, die dann erst durch die Axiome, in denen diese Ausdrücke vorkommen, *implicite charakterisiert werden.*[4])

Zufolge dieser Auffassung sind die Axiome überhaupt keine Urteile, von denen man sagen kann, daß sie wahr oder falsch sind; nur in dem

[2]) „Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen", 1872. (Mathematische Annalen, Bd. 43.)

[3]) „Vorlesungen über neuere Geometrie", 1882.

[4]) Man spricht in diesem Sinne von „impliciter Definition".

Zusammenhange des ganzen Axiomensystems haben sie überhaupt einen Sinn. Und auch das Axiomensystem als Ganzes bildet nicht den Ausspruch einer Wahrheit, vielmehr ist die logische Struktur der axiomatiscen Geometrie im Sinne *Hilberts* — ganz entsprechend derjenigen der abstrakten Gruppentheorie — eine rein hypothetische: Wenn irgendwo in Wirklichkeit drei Systeme von Gegenständen vorliegen sowie bestimmte Beziehungen zwischen diesen Gegenständen, derart, daß für diese die Axiome der Geometrie zutreffen (d. h. daß bei geeigneter Zuordnung der Namen zu den Gegenständen und Beziehungen die Axiome in wahre Behauptungen übergehen), dann treffen für diese Gegenstände und Beziehungen auch alle Lehrsätze der Geometrie zu. Das Axiomsystem selbst bringt also nicht eine Tatsächlichkeit zum Ausdruck, sondern es stellt nur eine mögliche Form eines Systems von Verknüpfungen dar, welches mathematisch nach seinen *inneren* Eigenschaften zu untersuchen ist.

Hiernach kommt die axiomatische Behandlung der Geometrie darauf hinaus, daß man von der Geometrie, so wie sie als Wissenschaft von den räumlichen Figuren vorliegt, den rein mathematischen Bestandteil der Erkenntnis ablöst und für sich abgesondert untersucht. Die räumlichen Verhältnisse werden gleichsam in die Sphäre des Mathematisch-Abstrakten projiziert, in welcher die Struktur ihres Zusammenhanges sich als ein Objekt des rein mathematischen Denkens darstellt und einer Forschungsweise unterzogen wird, die nur auf die logischen Beziehungen gerichtet ist, unbekümmert um die Frage nach der *sachlichen* Wahrheit, d. h. um die Frage, ob die durch die Axiome festgelegten geometrischen Verknüpfungen sich in der Wirklichkeit (oder auch nur in unserer räumlichen Anschauung) vorfinden.

Diese Art der Deutung, welche die axiomatische Methode in *Hilberts* Grundlagen der Geometrie erfuhr, bot nun insbesondere den Vorteil, daß sie nicht auf die Geometrie beschränkt war, sondern sich ohne weiteres auf andere Disziplinen übertragen ließ. Den Gesichtspunkt der Gleichartigkeit der axiomatischen Methode in ihrer Anwendung auf die verschiedensten Gebiete hat *Hilbert* auch von vornherein ins Auge gefaßt, und von ihm geleitet suchte er diese Methode in möglichst weitem Umfange zur Geltung zu bringen. So gelang es ihm insbesondere, die kinetische Gastheorie sowie die elementare Strahlungstheorie in strenger Weise axiomatisch zu begründen.

Auch schlossen sich der axiomatischen Forschungsweise *Hilberts* viele Mathematiker an und wirkten im Sinne seiner Bestrebungen. Insbesondere war es ein Erfolg der Axiomatik, als *Zermelo* im Gebiete der Mengenlehre die bis dahin bestehende Unsicherheit des Schließens durch eine geeignete axiomatische Abgrenzung der Schlußweisen überwand und zugleich auch mit seinem Axiomensystem eine gemeinsame Grundlage für Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre schuf[5]).

Eine Zusammenfassung der methodischen Leitgedanken und eine Übersicht über die Ergebnisse der axiomatischen Forschung hat *Hilbert* in seinem Züricher Vortrag über „Axiomatisches Denken“ (1917)[6]) gegeben. Hier kennzeichnet er die axiomatische Methode als ein allgemeines Verfahren des wissenschaftlichen Denkens. Dieses Verfahren setzt auf allen den Wissensgebieten ein, wo man bereits zur Aufstellung einer Theorie — oder, wie *Hilbert* es ausdrückt, zu einer Ordnung der Tatsachen mit Hilfe eines Fachwerkes von Begriffen — gelangt ist. Es zeigt sich dann jedesmal, daß zum logischen Aufbau der Theorie einige wenige Sätze ausreichen, und man gewinnt damit die Möglichkeit einer axiomatischen Grundlegung der Theorie. Diese wird zunächst im Sinne der alten Axiomatik erfolgen; man kann dann aber stets — so wie in der Geometrie — zu dem Hilbertschen axiomatischen Standpunkt übergehen, indem man von dem Erkenntnis-Charakter der Axiome absieht und das ganze Fachwerk der Begriffe nur (als eine *mögliche* Form eines Verknüpfungszusammenhanges) auf seine innere Struktur hin betrachtet.

Somit wird die Theorie zum Objekt einer rein mathematischen Untersuchung, welche eben die *axiomatische* heißt. Und zwar sind es bei allen Theorien dieselben Hauptfragen, welche man zu erörtern hat: Zunächst einmal muß das Axiomensystem, damit es einen möglichen Verknüpfungszusammenhang darstellt, der Bedingung der *Widerspruchsfreiheit* genügen, d. h. die in den Axiomen ausgedrückten Beziehungen müssen miteinander logisch vereinbar sein. Somit entsteht die Aufgabe eines Nachweises für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems — ein Problem, welches die alte Auffassung der Axiomatik nicht kennt, weil hier ja jedes Axiom als Ausspruch einer Wahrheit gilt. Sodann kommt es darauf an, einen Überblick über die logischen *Abhängigkeiten* zwischen den verschiedenen Sätzen der Theorie zu gewinnen, insbesondere hat man zu untersuchen, ob die Axiome voneinander logisch unabhängig sind, oder ob etwa eines oder mehrere von ihnen aus den übrigen Axiomen bewiesen werden können und somit in ihrer Rolle als Axiome überflüssig sind. Außerdem aber besteht noch die Aufgabe, nach den Möglichkeiten einer „Tieferlegung der Fundamente“ der Theorie zu forschen, d. h. zu prüfen, ob nicht die vorliegenden Axiome der Theorie sich auf Sätze von fundamentalerem Charakter zurückführen lassen, welche dann „eine tiefere Schicht von Axiomen“ für das betrachtete Fachwerk von Begriffen bilden würden.

[5]) „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“, 1907. (Mathematische Annalen, Bd. 65.)
[6]) Mathematische Annalen, Bd. 78.

Diese Art der Untersuchung, welche durchaus mathematischen Charakter besitzt, läßt sich nun auf jedes Wissensgebiet anwenden, das überhaupt einer theoretischen Behandlung fähig ist, und ihre Ausführung ist für die Klarheit der Erkenntnis und für die systematische Übersicht von höchstem Wert. Somit gewinnt durch die Idee der Axiomatik das mathematische Denken eine universale Bedeutung für das wissenschaftliche Erkennen. In der Tat kann *Hilbert* behaupten: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit der Mathematik."

Mit dieser umfassenden Ausgestaltung des axiomatischen Gedankens war nun zwar ein hinlänglich weiter Rahmen für die mathematische Problemstellung gewonnen und die erkenntnistheoretische Fruchtbarkeit der Mathematik klargelegt. Aber in Betreff der *Sicherheit* des mathematischen Verfahrens blieb noch eine grundsätzliche Frage offen.

Nämlich als das Erste und Wichtigste bei der axiomatischen Untersuchung einer Theorie war ja die Aufgabe erkannt, die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems zu beweisen. In der Tat bildet die Widerspruchsfreiheit der Axiome die Lebensfrage für eine jede axiomatische Theorie; denn von ihr hängt es ab, ob das Fachwerk der Begriffe überhaupt einen Verknüpfungszusammenhang oder nur den Schein eines solchen darstellt.

Wenn wir nun zusehen, wie es bei den verschiedenen geometrischen und physikalischen Theorien, die eine axiomatische Begründung erfahren haben, mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit bestellt ist, so finden wir, daß dieser überall nur in einem relativen Sinn erbracht ist: die Widerspruchsfreiheit des zu untersuchenden Axiomensystems wird bewiesen, indem man ein System von Gegenständen und von Beziehungen *innerhalb der mathematischen Analysis* aufweist, für welches die Axiome erfüllt sind. Diese „Methode der Zurückführung" auf die Analysis (d. h. auf die Arithmetik im weiteren Sinne) hat zur Voraussetzung, daß die Analysis selbst ein widerspruchsfreies System bildet, — sei es nun, daß sie als ein Inbegriff von Erkenntnissen oder nur als ein axiomatisches Gebäude (d. h. als ein bloß mögliches System von Verknüpfungen) anzusehen ist.

Nun ist aber die Widerspruchsfreiheit der Analysis nicht so ohne weiteres selbstverständlich, wie man zunächst denken möchte. Die Schlußweisen, welche man in der Theorie der reellen Zahlen und der reellen Funktionen anwendet, haben nicht jenen Charakter des unmittelbar Handgreiflichen, wie er etwa den Schlüssen der elementaren Zahlentheorie eigen ist. Und wenn man die Beweismethoden von allem irgendwie Problematischen befreien will, so ist man genötigt, die Analysis axiomatisch aufzubauen. Es erweist sich somit die Notwendigkeit, auch für die Analysis einen Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit zu liefern.

Das Erfordernis eines solchen Nachweises zur Sicherheit der axiomatischen Methode und der Mathematik überhaupt hat *Hilbert* von Anfang an erkannt und betont. Und wenngleich seine Bemühungen um dieses Problem noch nicht zu dem Endziel geführt haben, so ist es ihm doch geglückt, den methodischen Ansatz zu finden, durch welchen die Aufgabe mathematisch angreifbar wird.

Die Grundgedanken dieses Ansatzes wurden von *Hilbert* schon 1904 in seinem Heidelberger Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik"[7]) dargelegt. Jedoch boten diese Ausführungen dem Verständnis große Schwierigkeiten und waren auch manchen Anfechtungen ausgesetzt. Seitdem hat *Hilbert* seinen Plan weiter verfolgt und seinen Ideen eine faßliche Form gegeben, die er kürzlich in einem Vortragszyklus in Hamburg zur Darstellung brachte.

Der Gedankengang, auf welchem der Hilbertsche Ansatz für die Grundlegung der Arithmetik und Analysis beruht, ist folgender: Die methodischen Schwierigkeiten der Analysis, auf Grund deren man in dieser Wissenschaft genötigt ist, über den Rahmen des konkret Vorstellbaren hinauszugehen, rühren davon her, daß die Stetigkeit und das Unendliche hier eine wesentliche Rolle spielen. Dieser Umstand würde auch für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Analysis ein unüberwindliches Hindernis bilden, wenn dieser Nachweis in dem Sinne geführt werden müßte, daß man zeigt: ein System von Dingen wie es die Analysis annimmt — etwa das System aller endlichen oder unendlichen Mengen von ganzen Zahlen —, ist logisch möglich.

Nun braucht aber die Behauptung der Widerspruchsfreiheit gar nicht in diesem Sinne bewiesen zu werden, vielmehr kann man ihr auch folgende ganz andere Wendung geben: die Schlußweisen der Analysis können niemals zu einem Widerspruch führen — oder, was auf dasselbe hinauskommt: es ist unmöglich, aus den Axiomen der Analysis und mit Hilfe ihrer Methoden des Schließens die Beziehung $1 \neq 1$ („1 ist ungleich 1") abzuleiten. Hier handelt es sich nicht um die Möglichkeit einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit von gewissen Eigenschaften, sondern um die Unmöglichkeit eines mathematischen Beweises mit bestimmten Eigenschaften. Ein mathematischer Beweis ist aber, im Unterschied von einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit, ein konkretes, in allen Teilen überblickbares Objekt; er muß sich, wenigstens grundsätzlich, von Anfang bis Ende vollständig mitteilen lassen. Und auch die verlangte Beschaffenheit des Beweises (daß er gemäß den Prinzipien der Analysis verläuft und zu dem Endergebnis $1 \neq 1$ führt) ist eine konkret fest-

[7]) Anhang VII zu den „Grundlagen der Geometrie".

stellbare Eigenschaft. Es besteht daher auch grundsätzlich durchaus die Möglichkeit, den Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Analysis durch elementare, handgreiflich sichere Überlegungen zu erbringen; wir müssen nur den Standpunkt einnehmen, daß nicht diejenigen Gegenstände, auf welche sich die Beweise der Analysis beziehen, sondern vielmehr diese Beweise selbst das Objekt der Untersuchung bilden.

Auf Grund dieser Erwägung ergibt sich nun für *Hilbert* die Aufgabe einer genaueren Betrachtung der Formen mathematischer Beweise. Wir müssen — so sagt er in seinem Vortrag über axiomatisches Denken — „den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert." Für die Struktur der mathematischen Beweise sind aber in erster Linie die allgemeinen Formen des logischen Schließens maßgebend. Daher muß die geforderte Untersuchung der mathematischen Beweise jedenfalls die logischen Schlußformen mitbetreffen. Und so erklärte auch *Hilbert* schon in dem Heidelberger Vortrag, daß „eine teilweise gleichzeitige Entwickelung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich" sei.

Mit diesem Gedanken knüpfte *Hilbert* an die *mathematische Logik* an. Diese Wissenschaft, deren Idee auf *Leibniz* zurückgeht und die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, von primitiven Anfängen anhebend, zu einem fruchtbaren Felde des mathematischen Denkens entwickelte, hat die Methoden ausgebildet, wie man durch eine symbolische Bezeichnung der einfachsten logischen Verknüpfungen (wie „und", „oder", „nicht", „alle") einer mathematischen Beherrschung der Formen des logischen Schließens gelangt. Es zeigte sich, daß man durch diesen „Logikkalkul" erst den vollen Überblick über das System der logischen Schlußformen gewinnt, von welchem die Schlußfiguren, die man in der traditionellen Logik behandelt, nur ein verhältnismäßig kleines Teilgebiet bilden. Insbesondere gelang es *Peano, Frege* und *Russell*, den Logikkalkul so auszugestalten, daß man damit die gedanklichen Schlüsse der mathematischen Beweise durch symbolische Operationen vollkommen nachbilden kann.

Dieses Verfahren des Logikkalkuls bildet eine sinngemäße Ergänzung der Methode der axiomatischen Begründung einer Wissenschaft, insofern dadurch neben der genauen Festlegung der *Voraussetzungen*, wie sie die axiomatische Methode bewirkt, auch eine genaue Verfolgung der *Schlußweisen* ermöglicht wird, mit Hilfe deren man von den Grundsätzen einer Wissenschaft zu ihren Folgerungen gelangt.

Indem nun *Hilbert* das Verfahren der mathematischen Logik sich zu eigen machte, nahm er an dieser Methode eine ganz entsprechende Umdeutung vor, wie er es mit der axiomatischen Methode getan hatte. So wie er ehedem die Grundbeziehungen und die Axiome der Geometrie ihres anschaulichen Inhalts entkleidete, so schaltet er nun aus den Beweisen der Arithmetik und Analysis, die er zum Gegenstand seiner Untersuchung macht, den gedanklichen Inhalt der Schlüsse aus, indem er die Formelsysteme, durch welche sich jene Beweise in dem Logikkalkul darstellen, losgelöst von ihrer inhaltlich-logischen Interpretation als das unmittelbare Objekt der Betrachtung nimmt und somit die Beweisführungen der Analysis durch ein rein formales Handeln ersetzt, welches mit bestimmten Zeichen nach festen Regeln stattfindet.

Durch diese Betrachtungsweise, in welcher die Absonderung des Spezifisch-Mathematischen von allem Inhaltlichen ihren Gipfelpunkt erreicht, gewinnt die Hilbertsche Ansicht von dem Wesen der Mathematik und der axiomatischen Methode erst ihren wirklichen Abschluß. Denn wir erkennen nunmehr, daß jene Sphäre des Mathematisch-Abstrakten, in welche die Denkmethode der Mathematik alles theoretisch Faßbare übersetzt, nicht diejenige des inhaltlich Logischen, sondern vielmehr das Gebiet des reinen Formalismus ist. Die Mathematik erweist sich als die allgemeine Lehre von den Formalismen, und indem wir sie als solche erfassen, wird auch ihre universale Bedeutung ohne weiteres klar.

Diese Bedeutung der Mathematik als allgemeine Formenlehre ist in der neueren Physik aufs glänzendste zutage getreten, insbesondere in der Einsteinschen Gravitationstheorie, wo der mathematische Formalismus für *Einstein* die Richtlinie abgab zur Aufstellung seines Gravitationsgesetzes, dessen genauere Form ohne Heranziehung der mathematischen Hilfsmittel niemals hätte gefunden werden können. Und hier war es wiederum *Hilbert*, der dieses Gravitationsgesetz zuerst auf seine einfachste mathematische Form brachte und, indem er die Möglichkeit einer harmonischen Zusammenfügung der Gravitationstheorie mit der Elektrodynamik aufzeigte, die weiteren an die Einsteinsche Theorie anknüpfenden mathematischen Spekulationen eröffnet hat, die dann von *Weyl* durch seine geometrische Idee zur systematischen Vollendung geführt wurden. Falls diese Spekulationen sich in der Physik bewähren sollten, so würde damit der Triumph der Mathematik in der modernen Wissenschaft ein vollkommener sein.

Betrachten wir nun im ganzen den Gedankenertrag von *Hilberts* philosophischen Untersuchungen sowie die Wirkung, die sie ausgeübt haben, und halten wir uns andererseits die anfangs geschilderte Entfaltung der Mathematik in der neueren Zeit vor Augen, so zeigt sich uns das wesentliche an *Hilberts* philosophischer Leistung darin, daß er den Anspruch auf einen uni-

versalen geistigen Einfluß in der Wissenschaft, den sich die Mathematik durch ihre innerliche Vertiefung und ihre großzügige Ausgestaltung erworben hatte, mit Nachdruck und Erfolg zur Geltung gebracht hat, indem er eine weitherzige philosophische Auffassung von der Mathematik entwickelte, welche es ermöglicht, der Bedeutung und Tragweite ihrer Methode gerecht zu werden. Die Freunde der mathematischen Wissenschaft werden ihm dafür dauernden Dank wissen.

Verzeichnis der bisherigen Publikationen von David Hilbert

(nebst kurzen Inhaltsangaben).

Von Karl Siegel, Göttingen.

1. *Über die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen;* Inaugural-Dissertation (Königsberg i. Pr. 1885, R. Leupold).

   Ein Verfahren zur Darstellung von Invarianten und Covarianten eines Systems binärer Formen wird allgemein begründet und auf spezielle binäre Formen angewendet.

2. *Über eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades.* Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe, Bd. *37* (1885), S. 427—438.

   Zur Erforschung der analytischen Natur und Bedeutung der invarianten Bildungen werden irrationale Invarianten eines Systems von Grundformen untersucht.

3. *Über die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz.* Mathematische Annalen Bd. *27* (1886), S. 158—161.

   Die notwendige und hinreichende Bedingung wird durch das identische Verschwinden einer gewissen Covariante geliefert.

4. *Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete* (Königsberger Habilitationsschrift). Mathematische Annalen Bd. *28* (1887), S. 381—446.

   Weiterführung der vorläufigen Mitteilung 2.

5. *Über eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete.* Mathematische Annalen Bd. *30* (1887), S. 15—29.

   Verkürzte Wiedergabe der Dissertation 1.

6. *Über die Singularitäten der Discriminantenfläche.* Mathematische Annalen Bd. *30* (1887), S. 437—441.

   Bestimmung der Gesamtordnung der singulären Gebilde der Discriminantenfläche.

7. *Über binäre Formenbüschel mit besonderer Combinantencigenschaft.* Mathematische Annalen Bd. *30* (1887), S. 561—570.

   Ableitung einiger Sätze über das identische Verschwinden von Überschiebungen zweier Formen.

8. *Über die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Functionaldeterminante.* Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe, Bd. *39* (1887), S. 112 bis 122.

   Aufstellung aller Formenbüschel von gegebener Funktionaldeterminante. Vgl. auch 15.

9. *Über binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante.* Mathematische Annalen Bd. *31* (1888), S. 482—492.

   Alle Formenbüschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$ werden bestimmt, deren Discriminante eine gegebene binäre Form 2ter, 4ter, 6ter Ordnung der Variabeln $\varkappa$, μ ist.

10. *Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe.* Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. *103* (1888), S. 337—345.

    Neue Ableitung des von *Stieltjes* gegebenen Ausdrucks der Discriminante.

11. *Lettre adressée à M. Hermite.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4. Reihe, Bd. *4* (1888), S. 249—256.

    Anwendung eines allgemeinen Prinzips auf die Untersuchung biquadratischer binärer und kubischer ternärer Formen.

12. *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.* Mathematische Annalen Bd. *32* (1888), S. 342—350.

    Beweis der Vermutung von *Minkowski* über die Existenz definiter Formen gerader Ordnung, welche nicht als Summe von Quadraten endlich vieler reeller Formen darstellbar sind.

13. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1888, S. 450—457.

    Vgl. 18.

14. *Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen.* Mathematische Annalen Bd. *33* (1889), S. 223—226.

    Neuer Beweis des Satzes von *Gordan* über die Endlichkeit des Invariantensystems.

15. *Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante.* Mathematische Annalen Bd. *33* (1889), S. 227—236.

    Vgl. 8.

16. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde II.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1889, S. 25—34.

    Vgl. 18.

17. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde III.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1889, S. 423—430.

    Vgl. 18.

18. *Über die Theorie der algebraischen Formen.* Mathematische Annalen Bd. *36* (1890), S. 473—534.

    Beweis der Sätze: 1. Zu jeder Folge von Formen $F_1, F_2, \ldots$ in n Variabeln gibt es eine Zahl m derart, daß jede Form F der Folge in der Gestalt

    $$F = A_1 F_1 + \cdots + A_m F_m$$

    darstellbar ist, wo $A_1, \ldots, A_m$ gewisse Formen derselben Variabeln bedeuten; haben dabei F_1,

$F_2, \ldots$ ganzzahlige Koeffizienten, so gilt dasselbe von $A_1, \ldots, A_m$. 2. Bei jedem System von Grundformen beliebig vieler Variabelnreihen, welche denselben oder verschiedenen Transformationen unterliegen, lassen sich alle ganzen rationalen Invarianten als ganze rationale Funktionen von endlich vielen festen ganzen rationalen Invarianten ausdrücken. Vgl. auch 13., 16., 17.

19. *Über die reellen Züge algebraischer Curven.* Mathematische Annalen Bd. *38* (1891), S. 115—138.
Aufstellung aller gestaltlich verschiedenen Arten von Raumkurven fester Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge.

20. *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.* a) Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, 63. Versammlung zu Bremen, 15.—20. September 1890 (Leipzig 1891, F. C. W. Vogel), S. 11—12. b) Mathematische Annalen Bd. *38* (1891), S. 459—460. c) Prace matematyczno-fizyczne Bd. *5* (1894), S. 13—14 (ins Polnische übersetzt von *S. Dickstein* unter dem Titel: *O odwzorowaniu ciągłem linii na kawałku powierzchni).*
Angabe eines einfachen Beispiels für die Abbildung eines Quadrates auf eine Strecke.

21. *Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null.* Acta mathematica Bd. *14* (1891), S. 217—224. (Zusammen mit *A. Hurwitz.)*
Anwendung der Sätze von *M. Noether* über birationale Transformation zur Reduktion diophantischer Gleichungen vom Grade $n \geq 3$ und Geschlecht 0 auf solche zweiten oder dritten Grades.

22. *Über die Theorie der algebraischen Invarianten.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1891, S. 232—242.
Vgl. 27.

23. *Über die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.* Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. *110* (1891), S. 104—129.
Beweis des Satzes: Ist ein Polynon von n (≥ 2) Variabeln in einem algebraischen Zahlkörper irreduzibel, so lassen sich für irgend r ($< n$) von den Variabeln solche ganzen rationalen Zahlen einsetzen, daß das neue Polynom von $n - r$ Variabeln auch noch irreduzibel ist.

24. *Über volle Invariantensysteme.* a) Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, 64. Versammlung zu Halle a. S. 21. bis 25. September 1891 (Leipzig 1891/92, F. C. W. Vogel), S. 11—12. b) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. *1* (1892), S. 61—62.
Vgl. 27.

25. *Über die Theorie der algebraischen Invarianten II.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1892, S. 6—16.
Vgl. 27.

26. *Über die Theorie der algebraischen Invarianten III.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1892, S. 439—449.
Vgl. 27.

27. *Über die vollen Invariantensysteme.* Mathematische Annalen Bd. *42* (1893), S. 313—373.
Unter Benutzung von 18. wird eine Methode zur Aufstellung des vollen Invariantensystems von Grundformen beliebig vieler Variabeln begründet.
Vgl auch 22., 24., 25., 26.

28. *Über ternäre definite Formen.* Acta mathematica Bd. *17* (1893), S. 169—197.
Beweis des Satzes: Jede ternäre definite Form ist Quotient zweier Summen von Quadraten reeller Formen.

29. *Über die Transcendenz der Zahlen e und π.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1893, S. 113 bis 116. b) Mathematische Annalen Bd. *43* (1893), S. 216—219. c) Prace matematyczno-fizyczne, Bd. *5* (1894), S. 1—5 (ins Polnische übersetzt von *S. Dickstein* unter dem Titel: *O przestępności liczb e i π*).
Vereinfachung der Beweise von *Hermite* und *Lindemann.*

30. *Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1894, S. 224—236.
Für jeden Galoisschen Körper werden gewisse besonders wichtige Unterkörper (Zerlegungskörper, Trägheitskörper, Verzweigungskörper) definiert.

31. *Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms.* Acta mathematica Bd. *18* (1894), S. 155 bis 160.
Berechnung der Discriminante der quadratischen Form

$$\int_0^1 (x_1 + t\,x_2 + \cdots + t^{n-1} x_n)^2 \, dt$$

mit Hilfe der Kugelfunktionen.

32. *Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *3* (1894), S. 59.
Vgl. 33.

33. *Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale.* Mathematische Annalen Bd. *44* (1894), S. 1—8.
Der Satz von *Dedekind* über die Eindeutigkeit der Primidealzerlegung wird unter Benutzung eines Galoisschen Körpers bewiesen.
Vgl. auch 33.

34. *Über den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper.* Mathematische Annalen Bd. *45* (1894), S. 309—340.
Rein arithmetische Begründung der Theorie derjenigen biquadratischen Zahlkörper, welche die Zahl $\sqrt{-1}$ enthalten; Einteilung seiner Idealklassen in Geschlechter; Ableitung des Dirichletschen Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste im Körper der Gaußschen ganzen komplexen Zahlen.

35. *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* a) Mathematische Annalen Bd. *46* (1895), S. 91—96. b) L'enseignement mathématique Bd. *3* (1901), S. 194—200 (Übersetzung ins Französische von *L. Laugel* unter dem Titel: *Sur la ligne droite regardée comme étant le plus court chemin d'un point à un autre.*
Axiomatische Begründung des Satzes: In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten nicht kleiner als die dritte Seite.

36. *De Seguier. Formes quadratiques et multiplication complexe d'après Kronecker.* Göttingische gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1895, Bd. *I*, S. 11—14.
Besprechung des Buches von *Seguier*.

37. *Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abel'sche Zahlkörper.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1896, S. 29—39.
Rein arithmetischer Beweis des Satzes: Alle absolut Abelschen algebraischen Zahlkörper sind Kreiskörper.

38. *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1896, S. 179—183.
Ableitung eines Satzes von *Dedekind* über hyperkomplexe Größen mit Hilfe eines in der Theorie der algebraischen Invarianten benutzten Satzes.

39. *Über die Theorie der algebraischen Invarianten.* Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress held in connection with the world's Columbian Exposition Chicago 1893 (New York 1896, Macmillan and Co.), S. 116 bis 124.
Übersicht über die Entwicklung der Invariantentheorie.

40. *Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, Jahrgang 1897, S. 60—69.

41. *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *4* (1897), S. I—XVIII und 175—546.
Bericht über die höhere Arithmetik mit kurzen Beweisen der Sätze; ausführliche Darstellung der Theorie des Kummerschen Zahlkörpers. Vgl. auch 68. und 76.

42. *Über diophantische Gleichungen.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1897, S. 48—54.
Beweis des Satzes: Die Diskriminante eines Polynoms vom Grade ≥ 4 mit ganzen rationalen Koeffizienten ist von ± 1 verschieden.

43. *Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche, nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1897, S. 63—70.
Verschärfung des Satzes von *Runge* über die Entwicklung analytischer Funktionen in eine Reihe rationaler Funktionen.

44. *Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1898, S. 370—399.
Vgl. 54.

45. *Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers.* Mathematische Annalen Bd. *51* (1899), S. 1—127.
Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste für total imaginäre Körper mit ungerader Klassenzahl.

46. *Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *6* (1899), S. 88—94.
Verallgemeinerung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf beliebige Grundkörper.

47. *Grundlagen der Geometrie.* a) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen (Leipzig 1899, B. G. Teubner), 92 S.; 2. Aufl. (Leipzig 1903, B. G. Teubner). V + 175 S.; 3. Aufl. (Leipzig und Berlin 1909, B. G. Teubner), VI + 279 S.; 4. Aufl. (Leipzig und Berlin 1913, B. G. Teubner), VI + 258 S. b) Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3. Reihe, Bd. *17* (1900), S. 103—209 (etwas veränderte Übertragung ins Französische von *L. Laugel* unter dem Titel: *Les principes fondamentaux de la géométrie*). c) (Chicago 1902, The Open Court Publishing Company) VII + 132 S. (ins Englische übersetzt von *E. J. Townsend* unter dem Titel: *The foundations of geometry*).
Axiomatische Begründung der Geometrie; Beweis der Widerspruchslosigkeit; Untersuchung der Sätze von *Pascal* und *Desargues*.

48. *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris 1900.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1900, S. 253—297. b) Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. *1* (1900), S. 44—63 und S. 213—237. c) L'enseignement mathématique Bd. *2* (1900), S. 349—355 (Auszug in französischer Übersetzung unter dem Titel: *Problèmes mathématiques*). d) Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août (Paris 1902, Gauthier-Villars), S. 58—114 (ins Französische übersetzt von *L. Laugel* unter dem Titel: *Sur les problèmes futurs des mathématiques*). e) Bulletin of the American Mathematical Society, 2. Reihe, Bd. *8* (1902), S. 437—479 (ins Englische übersetzt von *Mary Winston Newson* unter dem Titel: *Mathematical problems*).

49. *Über den Zahlbegriff.* a) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *8* (1900), S. 180—184. b) (ins Russische übersetzt von *A. Wassilieff*).
Vortrag über die axiomatischen Grundlagen der Arithmetik.

50. *Über das Dirichletsche Prinzip.* a) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *8* (1900), S. 184—188. b) Nouvelles annales de mathématiques, 3. Reihe, Bd. *19* (1900), S. 337 bis 344 (ins Französische übersetzt von *L. Laugel* unter dem Titel: *Sur le principe de Dirichlet*). c) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. *129* (1905), S. 63—67.
Fundierung der Methode des Dirichletschen Prinzips; Anwendung zur Lösung von Variationsproblemen.

51. *Über das Dirichletsche Prinzip.* a) Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901, 27 S. b) Mathematische Annalen Bd. *59* (1904), S. 161—186.
Von 50. verschiedene Begründung des Dirichletschen Prinzips, dargestellt am Existenzbeweis der Integrale erster Gattung auf einer gegebenen Riemannschen Fläche.

52. *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung.* Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 2 (1902), S. 87—99.

Beweis der Sätze: 1. Es gibt keine singularitätenfreie analytische Fläche von konstanter negativer Krümmung. 2. Die Kugel ist die einzige im Endlichen geschlossene singularitätenfreie analytische Fläche von konstanter positiver Krümmung.

53. *Über die Grundlagen der Geometrie.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1902, S. 233—241. b) Mathematische Annalen Bd. *56* (1902), S. 381 bis 422.

Axiomatische Begründung der Euklidischen und Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie.

54. *Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper.* Acta mathematica Bd. *26* (1902), S. 99—131.

Aufstellung der wichtigsten Sätze über relativquadratische Zahlkörper bei beliebigem algebraischen Grundkörper und über den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. Vgl. auch 44.

55. *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.* Mathematische Annalen Bd. *57* (1903), S. 137—150.

Die Geometrie von *Bolyai-Lobatschefskij* wird ohne Stetigkeitsaxiome begründet.

56. *Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.* Proceedings of the London Mathematical Society Bd. *35* (1903), S. 50—68.

Untersuchungen über die zur Herleitung des Satzes notwendigen Axiome.

57. *Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Bd. *I 2* (Leipzig 1900—1904, B. G. Teubner), S. 675—698. Vgl. auch 79.

58. *Theorie der Kreiskörper.* Ebendaselbst, S. 699 bis 714. Vgl. auch 79.

59. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Erste Mitteilung, Jahrgang 1904, S. 49—91; Zweite Mitteilung, Jahrgang 1904, S. 213—259; Dritte Mitteilung, Jahrgang 1905, S. 307—338; Vierte Mitteilung, Jahrgang 1906, S. 157—227; Fünfte Mitteilung, Jahrgang 1906, S. 439—480; Sechste Mitteilung, Jahrgang 1910, S. 355—417.

Funktionen unendlich vieler Veränderlicher; Lineare Integralgleichungen; Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Variationsrechnung, Geometrie, Hydrodynamik. Vgl. auch 69.

60. *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* a) Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 (Leipzig 1905, B. G. Teubner), S. 174—185. b) L'enseignement mathématique Bd. 7 (1905), S. 89—103 (ins Französische übersetzt unter dem Titel: *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*). c) The Monist, Jahrgang 1905, S. 338—352 (ins Englische übersetzt von *G. B. Halsted* unter dem Titel: *On the foundations of logic and arithmetic*).

Vortrag über die Widerspruchslosigkeit der Axiome der Arithmetik.

61. *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.* Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 (Leipzig 1905, B. G. Teubner), S. 233—240.

Existenzbeweis für eine in einem Gebiete analytische Funktion, deren Real- und Imaginärteil auf dem Rande einer linearen Relation genügen.

62. *Zur Variationsrechnung.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1905, S. 159—180. b) Mathematische Annalen Bd. *62* (1906), S. 351—370.

Übertragung der Methode des unabhängigen Integrals auf Doppelintegrale.

63. *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Bd. 27 (1909), S. 59—74.

Ableitung einiger Sätze über analytische Funktionen mit unendlich vielen Veränderlichen.

64. *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsches Problem). Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 17—36. b) Mathematische Annalen Bd. 67 (1909), S. 281—300.

Beweis des Satzes von *Waring* über die Zerlegung natürlicher Zahlen in *n*te Potenzen.

65. *Hermann Minkowski. Gedächtnisrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. Mai 1909.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, Jahrgang 1909, S. 72 bis 101. b) Mathematische Annalen Bd. *68* (1910), S. 445—471.

66. *Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 308—313.

Nachweis der Existenz einer singularitätenfreien Fläche vierter Ordnung vom Maximalrange 12.

67. *Zur Theorie der konformen Abbildung.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 314—323.

Aufstellung eines Satzes über die konforme Abbildung eines beliebig oft zusammenhängenden beliebig vielblättrigen Gebietes auf einen Schlitzbereich.

68. *Théorie des corps de nombres algébriques* (Traduit par *M. A. Lévy*, Professor au Lycée Voltaire). Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 3. Reihe, Bd. *1* (1909), S. 257 bis 328, und 3. Reihe, Bd. *2* (1912) S. 225—456.

Französische Übersetzung von 41.

69. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 595—618.

Sachlich geordnete Wiedergabe des Inhalts der 6 Mitteilungen 59. ohne Beweise.

70. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* (Leipzig und Berlin 1912, B. G. Teubner), XXVI + 282 S.

Abdruck von 59. und 71.

71. *Begründung der kinetischen Gastheorie.* Mathematische Annalen Bd. *71* (1912), S. 562—577.

Zurückführung der Fundamentalformel von *Maxwell-Boltzmann* in der kinetischen Gastheorie auf eine lineare Integralgleichung zweiter Art. Vgl. auch 70.

72. *Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen.* a) Festschrift Heinrich Weber, zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern (Leipzig und Berlin 1912, B. G. Teubner), S. 130—146. b) Mathematische Annalen Bd. 73 (1912), S. 95 bis 108.

Zwei Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen und einer abhängigen Variabeln nennt man zur selben Klasse gehörig, wenn sie umkehrbar integrallos ineinander transformiert werden können. Nachweis der Existenz mehrerer Klassen.

73. *Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 773—789. b) Physikalische Zeitschrift, 13. Jahrgang (1912), S. 1056—1064. c) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. *22* (1913), S. 1—15.

Ableitung der Sätze von *Kirchhoff* mit Hilfe der Theorie der linearen Integralgleichungen.

74. *Zusatz zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 22 (1913), S. 16—20.

75. *Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1913, S. 409—416. b) Physikalische Zeitschrift, 14. Jahrgang (1913), S. 592—595.

Axiomatische Grundlagen der Sätze von *Kirchhoff*.

76. *Théorie des corps de nombres algébriques* (Traduit par *A. Lévy* et *Th. Got*), (Paris 1913, A. Hermann et Fils), XVI + 380 S.

Französische Übersetzung von 41. mit Zusätzen von *Humbert* und *Got*.

77. *Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie (dritte Mitteilung).* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1914, S. 275—298. b) Physikalische Zeitschrift, 15. Jahrgang (1914), S. 878—889.

Neuer elementarer Beweis des Kirchhoffschen Satzes; Nachweis der Widerspruchslosigkeit der benutzten Axiome.

78. *Über die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen.* Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern (Berlin 1914, Julius Springer), S. 448—451.

Nachweis der Darstellbarkeit aller ganzen rationalen Invarianten eines Systems von Grundformen als ganze algebraische Funktionen gewisser Invarianten.

79. *Théorie des corps de nombres algébriques.* Exposé, d'après l'article allemand de *D. Hilbert* (Göttingue), par *H. Vogt* (Nancy). Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées Bd. *I 3* (Paris und Leipzig 1915, Gauthier-Villars et Cie. und B. G. Teubner), S. 388—473.

Mit Zusätzen versehene Übertragung von 57. und 58. ins Französische.

80. *Die Grundlagen der Physik.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse; Erste Mitteilung, Jahrgang 1915, S. 395—407; Zweite Mitteilung, Jahrgang 1917, S. 53—76.

Ableitung der Grundgleichungen der Physik aus den Axiomen von der Weltfunktion und von der allgemeinen Invarianz; Kausalität in der neuen Physik; Geometrie und Physik; Euklidische Pseudogeometrie als Lösung der physikalischen Grundgleichungen.

81. *Gaston Darboux (1842—1917).* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, Jahrgang 1917, S. 71—75. b) Acta mathematica Bd. *42* (1919), S. 269—273 (Übersetzung ins Französische).

Gedächtnisrede auf *Darboux*.

82. *Axiomatisches Denken.* a) Mathematische Annalen Bd. *78* (1918), S. 405—415. b) L'enseignement mathématique Bd. *20* (1919), S. 122—136 (Übersetzung ins Französische von *A. Reymond* unter dem Titel: *Pensée axiomatique*).

Abdruck eines Zürcher Vortrages über die axiomatische Behandlung der Mathematik.

83. *Adolf Hurwitz.* a) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, Jahrgang 1920, S. 75—83. b) Mathematische Annalen Bd. *83* (1921), S. 161—172.

Gedächtnisrede auf *Hurwitz*.